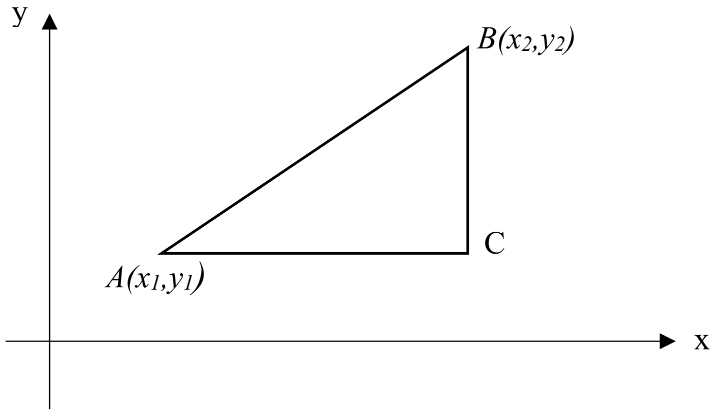
(22) 向量

講向量前,我們要從點談起,假設我們有兩點: $A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$,我們要知道 A、B 兩點的直線距離。



$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$\overline{AC}=|x_2-x_1|$

$\overline{BC}=|y_2-y_1|$

$\therefore \overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(1) $A=(3,-1)$, $B(-5,3)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-5-3)^2+\left(3-(-1)\right)^2}$

$=\sqrt{(-8)^2+(4)^2}$

$=\sqrt{64+16}$

$=\sqrt{80}$

$=4\sqrt{5}$

(2) $A=(-1,5)$ ， $B(3,-6)$

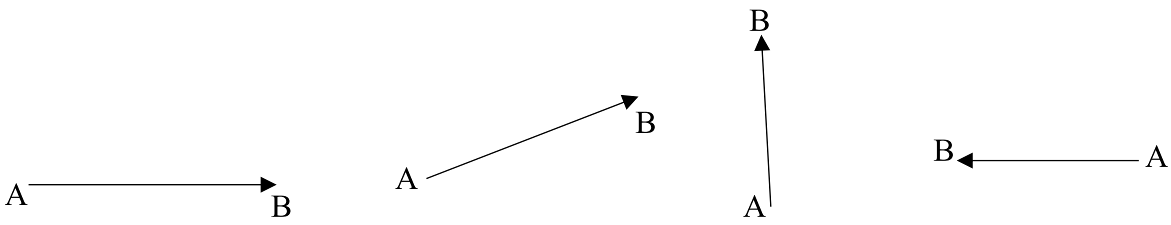
$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(3-(-1))^2+\left((-6)-5\right)^2}$$

$$=\sqrt{(4)^2+(-11)^2}$$

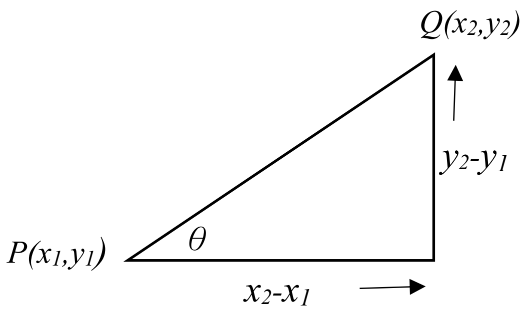
$$=\sqrt{16+121}$$

$$=\sqrt{137}$$

除了兩點之間的距離，我們還想知道兩點所連成的直線方向，請看下圖:



我們的直線線段有一個起點$P(x_1,y_1)$和一個終點$Q(x_2,y_2)$

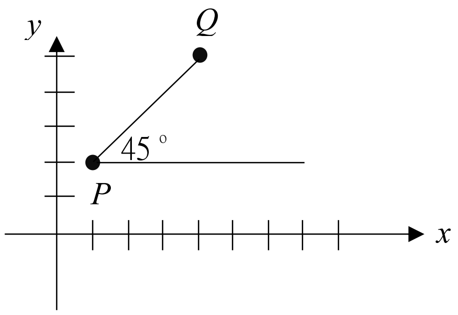


因此我們知道 P 和 Q 在平面上的座標，我們可以用三角函數來決定 θ 角的值：　$\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(3) $P = (1,2)$, $Q = (4,5)$

$tan\,\theta = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$

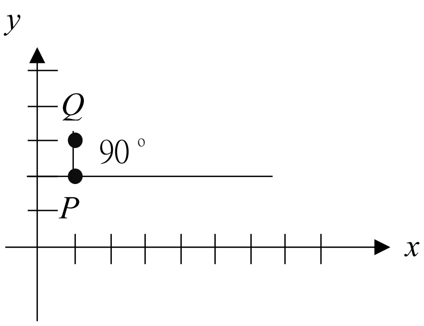
$\Rightarrow \theta = 45^o$



(4) $P = (1,2)$, $Q = (1,3)$

$tan\,\theta = \frac{3-2}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$

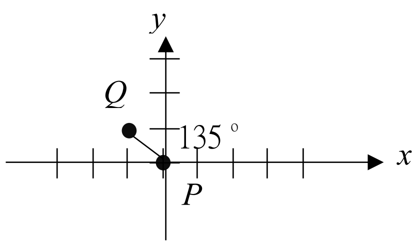
$\Rightarrow \theta = 90^o$



(5) $P = (0,0)$, $Q = (-1,1)$

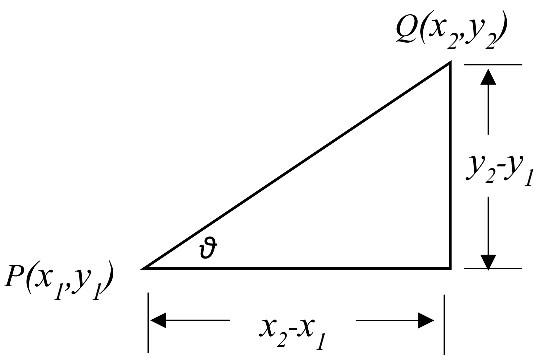
$tan\,\theta = \frac{1-0}{-1-0} = -1$

$\Rightarrow \theta = 135^o$



所謂向量，可以說向量是一個有長度和方向的數學量。

因此我們知道一個線段的起點和終點，我們可以決定線段的長度。令起點$P(x_1, y_1)$、終點$Q(x_2, y_2)$，這個線段的長度就是$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



這個線段的方向由$(y_2 - y_1)$和$(x_2 - x_1)$來決定，因此一個向量方向用$(y_2 - y_1)$和$(x_2 - x_1)$來表示。我們在討論向量時，是不管它在平面上的位置的。

向量通常用一個箭號表示。圖示$\vec{a}$代表一個向量，$\vec{a}$代表a的長度。向量$\vec{a}$所代表的線段一定有一個起點(x_1, y_1)和終點(x_2, y_2)。所以$\vec{a} = ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1))$。

(6)　$\vec{a} = (5,3)$，是一個向量，因此$(x_2 - x_1) = 5$，$(y_2 - y_1) = 3$。

已知的長度是$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

$\vec{a}$的方向可由它對 x 軸的夾角θ來看$tan\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{5} = 0.6$

(7) $\vec{a}=(-5,3)$

$(x_2-x_1)=-5$，$(y_2-y_1)=3$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-5)^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

$\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{3}{-5}=-0.6$

向量在日常生活中常被用到的，比方說，我們常說向東走一公里或者說，學校在家的東北方，距離是 35 公里，這些話都可用向量來描寫的。

向量在物理上更是非常重要，因此力有大小和方向性，向量在通訊上也相當重要，這些到了大學就可以學會了。

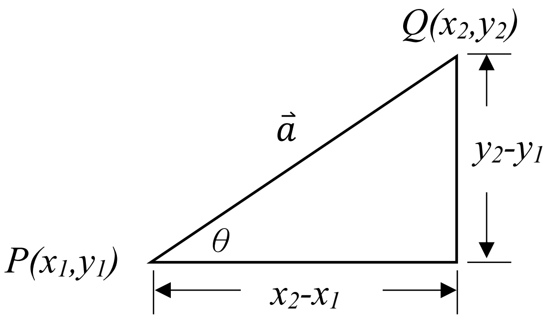
(8) $\vec{a}=(3,-7)$,已知起點是(1,3)求終點座標。

設終點$Q=(x,y)$，則 $x-1=3\ \therefore x=4$

$y-(-7)=3\ \therefore y=-4$

終點$Q=(4,-4)$

假如我們已知$|\vec{a}|$以及$\vec{a}$和 x 軸的夾角，就可以求得$\vec{a}$請看下圖:



$x_2-x_1=|\vec{a}|\cos\theta$
$y_2-y_1=|\vec{a}|\sin\theta$

(9)已知$|\vec{a}| = 2$,$\vec{a}$和 x 軸的夾角是45^o,求$\vec{a}$。

令$\vec{a}$起點 $P(x_1, y_1)$、終點$Q(x_2, y_2)$,則$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$x_2 - x_1 = |\vec{a}| \cos\theta = 2\cos 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$y_2 - y_1 = |\vec{a}| \sin\theta = 2\sin 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore \vec{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(10)已知$|\vec{a}| = 2$,$\theta = 30^o$,求$\vec{a}$。

令$\vec{a}$起點和終點分別$P(x_1, y_1)$和$Q(x_2, y_2)$,則$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

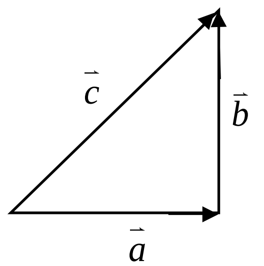
$x_2 - x_1 = |\vec{a}| \cos\theta = 2\cos 30^o = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$y_2 - y_1 = |\vec{a}| \sin\theta = 2\sin 30^o = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\therefore \vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$

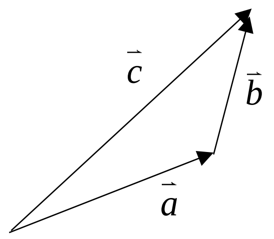
向量的加減

我們時常說，你至少向東走兩公里，再往北走一公里，這時我們就有兩個向量，一個向東一個向北，如下圖所示:



我們至少看上$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

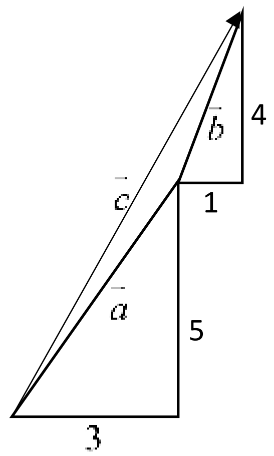
下圖也是兩個向量的加減



假設$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$，令$\vec{c} = (c_1, c_2)$

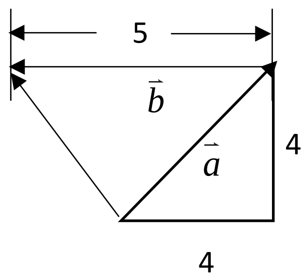
(11) 已知$\vec{a} = (3,5)$，$\vec{b} = (1,4)$，求$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$。

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ &= (3+1, 5+4)\\ &= (4,9)\end{aligned}$$



(12) $\vec{a} = (4,4)$，$\vec{b} =$ (-5,0)，求$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$。

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (4 + (-5), 4 + 0)\\ &= (-1,4)\end{aligned}$$



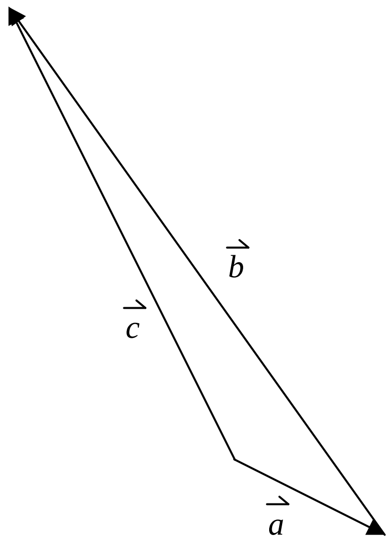
(13) $\vec{a} = (2,-1)$，$\vec{c} = (-3,6)$，已知$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$，求$\vec{b}$。

令$\vec{b} = (b_1, b_2)$

$\vec{c} = (-3,6) = \vec{a} + \vec{b} = (2 + b_1, -1 + b_2)$

$2 + b_1 = -3$
$b_1 = -3 - 2 = -5$
$-1 + b_2 = 6$
$b_2 = 6 + 1 = 7$

$\therefore \vec{b} = (b_1, b_2) = (-5,7)$



$\therefore\ \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(14) 請畫出以下的向量：

(a) $(1, 1)$

(b) $(1, -1)$

(c) $(-1, 1)$

(d) $(-1, -1)$