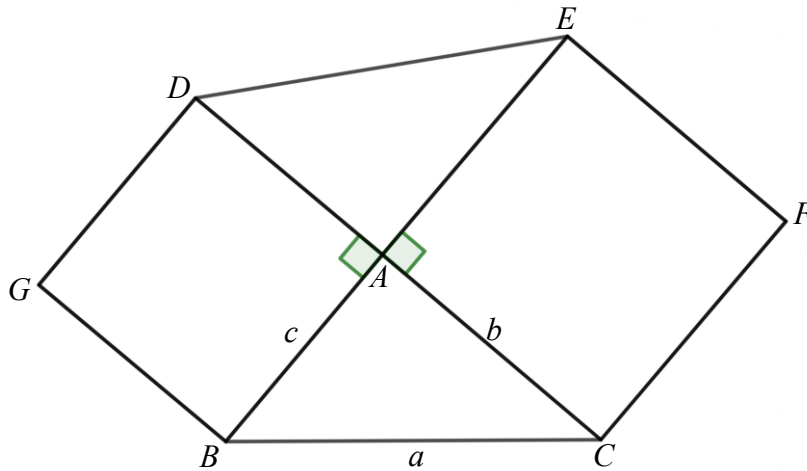


(16) 三角總複習 2

18. 已知 $\triangle ABC$ 的邊長為 a 、 b 和 c ，四邊形 $EGBA$ 和四邊形 $EACF$ 都是正方形，求 \overline{DE} 。



【解答】

$$\angle DAE = \angle A$$

$$\begin{aligned}\triangle DAE \text{ 中, } \overline{DE}^2 &= \overline{DA}^2 + \overline{EA}^2 - 2 \cos(\angle DAE) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc \cos(180^\circ - \angle A) \\ &= c^2 + b^2 + 2bc \cos A \text{-----(1)}\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 中, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{-----(2)}$$

$$\begin{aligned}\text{將(2)代入(1), } \overline{DE}^2 &= c^2 + b^2 + 2bc \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \\ &= c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2 \\ &= 2(c^2 + b^2) - a^2\end{aligned}$$

$$\text{答: } \overline{DE} = \sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

19. $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 的邊長比為 $1 : 2 : \sqrt{3}$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 。

【解答】

$$\text{令 } a = 1h = h$$

$$b = 2h$$

$$c = \sqrt{3}h$$

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(2h)^2 + (\sqrt{3}h)^2 - h^2}{2 \times 2h \times \sqrt{3}h} = \frac{4h^2 + 3h^2 - h^2}{4\sqrt{3}h^2} \\ &= \frac{6h^2}{4\sqrt{3}h^2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{h^2 + (\sqrt{3}h)^2 - (2h)^2}{2 \times h \times \sqrt{3}h} \\ &= \frac{h^2 + 3h^2 - 4h^2}{4\sqrt{3}h^2} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - (\angle A + \angle B) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) \\ &= 180^\circ - 120^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

答： $\angle A = 30^\circ$ 、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $\angle C = 60^\circ$

20. $\triangle ABC$ 中，已知 $a : b : c = 2\sqrt{3} : 2 : 2$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 。

【解答】

$$\text{令 } a = 2\sqrt{3}h$$

$$b = 2h$$

$$c = 2h$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}h)^2 + (2h)^2 - (2h)^2}{2 \times \sqrt{3}h \times 2h} \\ &= \frac{12h^2 + 4h^2 - 4h^2}{4\sqrt{3}h^2} \\ &= \frac{12h^2}{4\sqrt{3}h^2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ$$

$$\text{同理， } \angle C = \angle B = 30^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - (\angle B + \angle C) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) \\ &= 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

答： $\angle A = 120^\circ$ 、 $\angle B = 30^\circ$ 、 $\angle C = 30^\circ$

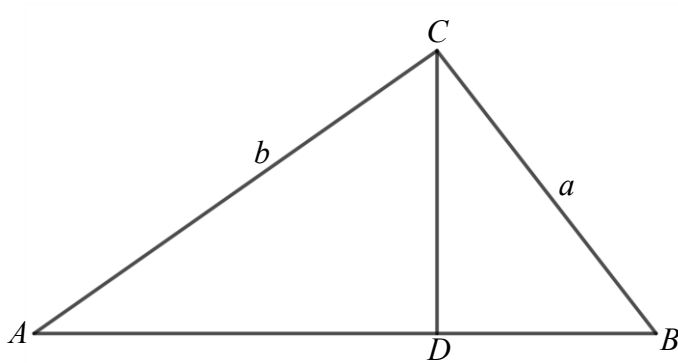
21. $\triangle ABC$ 中，求證

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

【證明】



依圖，得知

$$\cos A = \frac{\overline{AD}}{b} \Rightarrow \overline{AD} = b \cos A$$

$$\cos B = \frac{\overline{DB}}{a} \Rightarrow \overline{DB} = a \cos B$$

$$c = \overline{AD} + \overline{DB} = b \cos A + a \cos B$$

同理可證

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

22. 求證： $c(b \cos B - a \cos A) = (a^2 - b^2) \cos C$

【證明】

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= c\left(b \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - a \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= c\left[\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{2abc} - \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{2abc}\right] \\ &= \frac{1}{2ab} [b^2(a^2+c^2-b^2) - a^2(b^2+c^2-a^2)] \\ &= \frac{1}{2ab} [b^2a^2 + b^2c^2 - b^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + a^4] \\ &= \frac{1}{2ab} [(b^2a^2 - b^4) + (a^4 - a^2b^2) - (a^2c^2 - b^2c^2)] \\ &= \frac{1}{2ab} [b^2(a^2 - b^2) + a^2(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2)] \\ &= \frac{(a^2-b^2)}{2ab} (a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= (a^2 - b^2) \cos C \\ &= (a^2 - b^2) \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab} \end{aligned}$$

\therefore 左邊=右邊，故得證

23. 求證： $(b - a \cos c) \sin A = \frac{ac}{2R} \cos A$

【證明】

從第 21 題證明得知 $b = c \cos A + a \cos C$

$$\therefore (b - a \cos C) = (c \cos A + a \cos C - a \cos C) = c \cos A \text{-----(1)}$$

將(1)代入左邊 $(c \cos A) \sin A$

$$= c \cos A \frac{a}{2R} \text{-----(使用正弦定理 } \sin A = \frac{a}{2R} \text{ 代入)}$$

$$= \frac{ac}{2R} \cos A$$

故得證

24. 求證： $\cos A = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$

【證明】 使用正弦定理 $\sin A = \frac{a}{2R}$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

故得證

25. $\angle A:\angle B:\angle C = 1:1:4$ ，已知 $c = 2\sqrt{3}$ ，求 a 和 b 。

【作答】由正弦定理

已知 $\angle A:\angle B:\angle C = 1:1:4$ ，

令 $\angle A = k$ 、 $\angle B = k$ 、 $\angle C = 4k$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$k + k + 4k = 180^\circ$$

$$6k = 180^\circ, k = 30^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 30^\circ, \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2a = 4$$

$$a = 2, \because \angle A = \angle B, \therefore a = b = 2$$

答： $a = b = 2$

26. $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 3$ ， $b = 4$ ， $c = 5$ ，求三角形之面積。

【作答】

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{4^2+5^2-3^2}{2 \times 4 \times 5} \\ &= \frac{16+25-9}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3}{5} = 6\end{aligned}$$

答：6 平方單位

27. 求證： $\triangle ABC$ 中，若 $a \cos B - b \cos A = c$ 時，則 $\triangle ABC$ 必定是直角三角形。

【證明】

$$\begin{aligned} & a \cos B - b \cos A \\ &= a \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \\ &= \frac{2a^2 - 2b^2}{2c} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{c} \end{aligned}$$

帶回算式 $a \cos B - b \cos A = c$

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{c} &= c \\ a^2 - b^2 &= c^2 \\ a^2 &= c^2 + b^2 \end{aligned}$$

根據畢氏定理， $\triangle ABC$ 是直角三角形，故得證。

28. 求證：若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ，則 ΔABC 必為直角三角形。

【證明】

由正弦定理得知

$$a = 2R \sin A$$

$$b = 2R \sin B$$

$$c = 2R \sin C$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

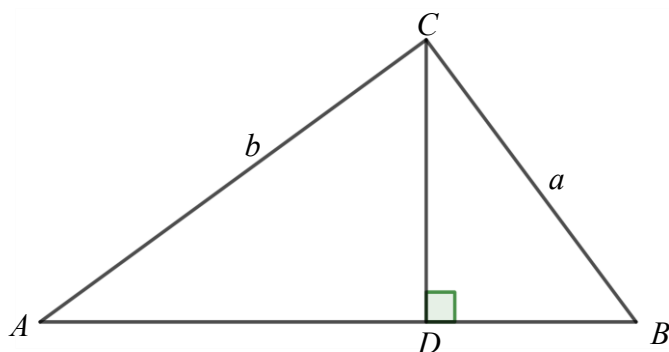
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

根據畢氏定理， ΔABC 是直角三角形，故得證。

29. 求證： $\triangle ABC$ 中，當 $a \cos B = b \cos A$ ，則 $a = b$



【證明】

令 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，

則 $a \cos B = \overline{BD}$

$b \cos A = \overline{AD}$

$\therefore a \cos B = b \cos A$

$\therefore \overline{BD} = \overline{AD}$

由此可證明 $\triangle CAD \cong \triangle CBD$

$\therefore a = b$

故得證。

30. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 及 a 、 b ，求 c 。

【解題】

由正弦定理得知

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$
$$c \sin A = a \sin C$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

答：

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

31. $\triangle ABC$ 中，已知 b 、 c 、 $\angle A$ ，求 a 、 $\angle B$ 及 $\angle C$ 。

【解題】

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 可求得 } \angle B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ 可求得 } \angle C$$

32. $\triangle ABC$ 中，已知 a 、 b 、 c ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 及 $\angle C$ 。

【解題】

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \angle A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \angle B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \angle C = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

33. $\triangle ABC$ 中，已知 b 、 c 、 $\angle B$ ，求 a 、 $\angle A$ 及 $\angle C$ 。

【解題】

由正弦定理得知

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$b \sin C = c \sin B$$

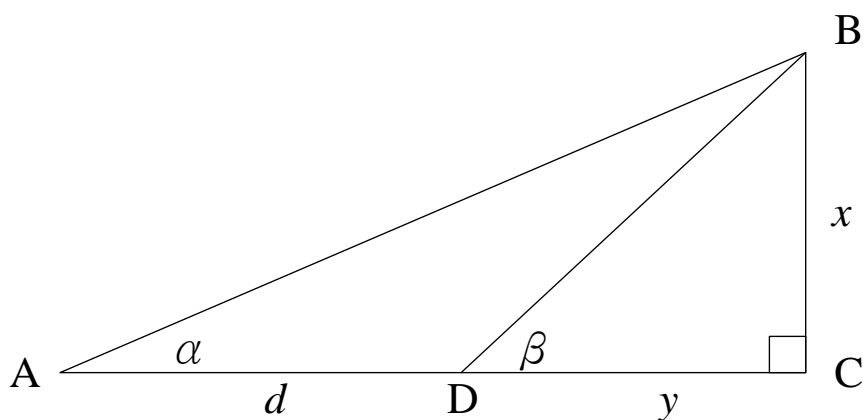
$$\sin C = \frac{c}{b} \sin B, \text{ 可求得 } \angle C$$

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C), \text{ 可求得 } \angle A$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\therefore a = b \frac{\sin A}{\sin B}$$

34. 如圖，已知 α 、 β 及 d ，求 x



【解答】

$$\because \tan \beta = \frac{x}{y}, \therefore y = \frac{x}{\tan \beta} = x \cot \beta \text{-----(1)}$$

$$\because \tan \alpha = \frac{x}{y+d}, \therefore y+d = \frac{x}{\tan \alpha} = x \cot \alpha \text{-----(2)}$$

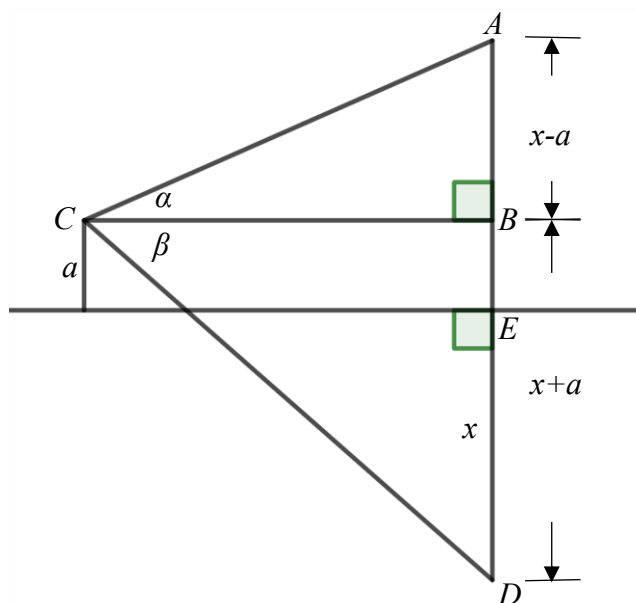
(2) - (1) ,

$$d = x \cot \alpha - x \cot \beta = x(\cot \alpha - \cot \beta)$$

$$x = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$\text{答：} x = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

35. 如圖，已知 α 、 β 、 a ， $\overline{AE} = \overline{DE} = x$ ，求 x 。



【解答】

$$\Delta ABC \text{ 中, } \frac{x-a}{\overline{BC}} = \tan \alpha \text{-----(1)}$$

$$\Delta BCD \text{ 中, } \frac{x+a}{\overline{BC}} = \tan \beta \text{-----(2)}$$

$$\text{由(1), } \overline{BC} = \frac{x-a}{\tan \alpha}$$

$$\text{由(2), } \overline{BC} = \frac{x+a}{\tan \beta}$$

$$\therefore \frac{x-a}{\tan \alpha} = \frac{x+a}{\tan \beta}$$

$$(x-a) \tan \beta = (x+a) \tan \alpha$$

$$x \tan \beta - a \tan \beta = x \tan \alpha + a \tan \alpha$$

$$x \tan \beta - x \tan \alpha = a \tan \beta + a \tan \alpha$$

$$x(\tan \beta - \tan \alpha) = a(\tan \beta + \tan \alpha)$$

$$x = \frac{a(\tan \beta + \tan \alpha)}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

$$\text{答: } x = \frac{a(\tan \beta + \tan \alpha)}{\tan \beta - \tan \alpha}$$