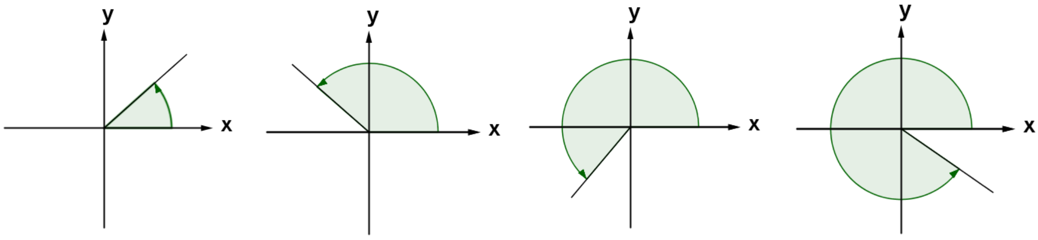
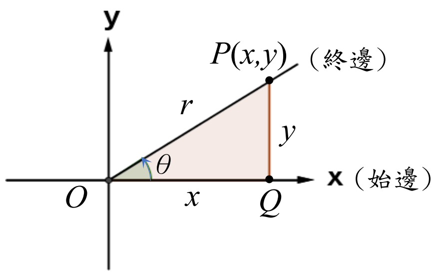
(10) 廣義角的三角函數

在過去的幾節中，我們討論的角都是銳角，也就是小於 90°的角，但是我們可能有大於 90°的角，如下圖所示：



這些角是廣義角，廣義角也有三角函數的，請看下圖



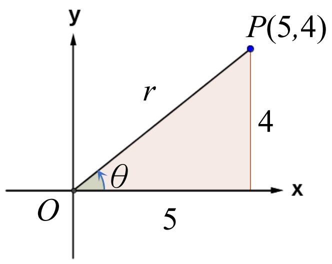
任何一個角都有一個始邊和終邊，我們將始邊放在 x 軸上，然後在終邊上任取一點 P，設 P 點的座標為 $P(x,y)$，$\overline{OP}$的長度為 r，則

$$sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x}$$

例 1　　$P(x,y) = (5,4)$



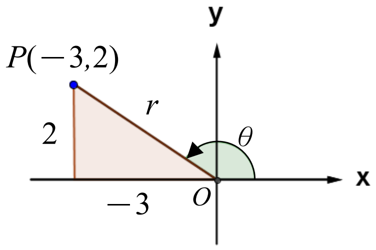
$$r = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

$$sin\,\theta = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$cos\,\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$tan\,\theta = \frac{4}{5}$$

例 2　　$P(x,y) = (-3,2)$



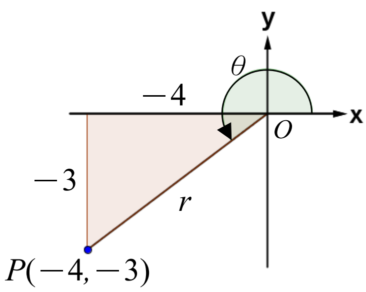
$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$sin\,\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$cos\,\theta = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$tan\,\theta = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

例 3　　$P(x,y) = (-4, -3)$



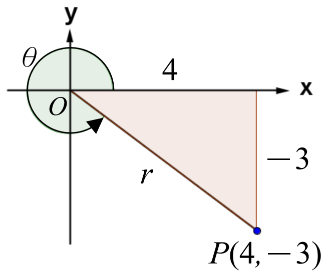
$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$sin\,\theta = \frac{-3}{5}$$

$$cos\,\theta = \frac{-4}{5}$$

$$tan\,\theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

例 4　$P(x, y) = (4, -3)$



$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

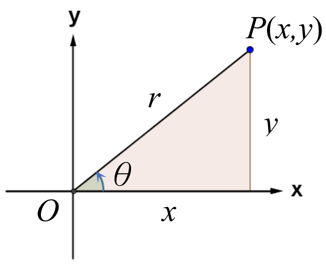
$sin\,\theta = \frac{-3}{5}$

$cos\,\theta = \frac{4}{5}$

$tan\,\theta = \frac{-3}{4}$

我們現在看一下這些角函數的正負值：

第一象限



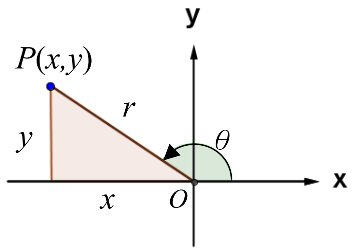
x 和 y 都為正的，因此

$sin\theta = \frac{y}{r}$為正值

$cos\theta = \frac{x}{r}$為正值

$tan\theta = \frac{y}{x}$為正值

第二象限



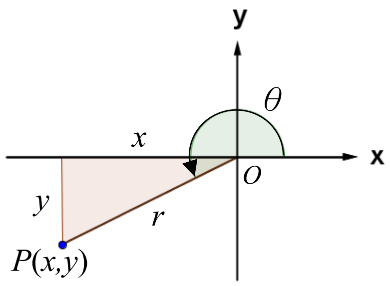
x 為負值，y 為正值，因此

$sin\theta = \frac{y}{r}$為正值

$cos\theta = \frac{x}{r}$為負值

$tan\theta = \frac{y}{x}$為負值

第三象限



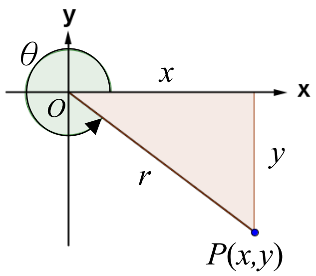
x 和 y 都為負值

$sin\theta = \frac{y}{r}$為負值

$cos\theta = \frac{x}{r}$為負值

$tan\theta = \frac{y}{x}$為正值

第四象限



x 為正值，y 為負值，故

$sin\theta = \frac{y}{r}$為負值

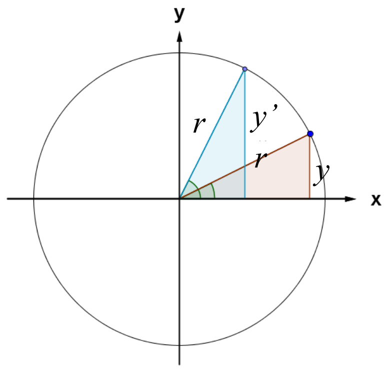
$cos\theta = \frac{x}{r}$為正值

$tan\theta = \frac{y}{x}$為負值

$sin\theta$在各象限的變化

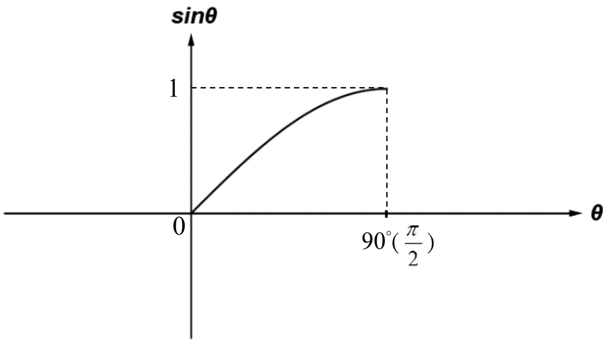
我們畫一個圓，圓的半徑為 r

第一象限

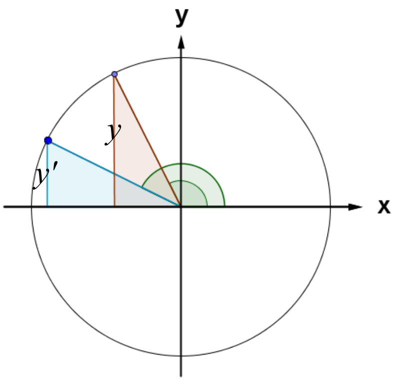


$$sin\theta = \frac{y}{r}$$

在第一象限，當θ增大時，y 亦增大，所以$sin\theta$是隨θ增加的，而且$sin\theta$是正值。

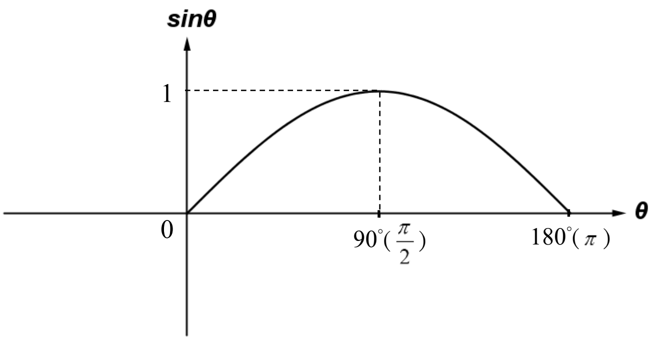


第二象限

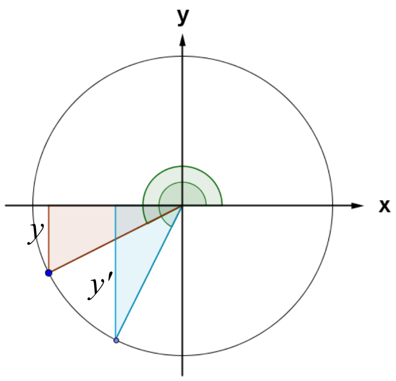


在第二象限，當θ增大時，y會變小，所以$sin\theta$是隨θ增加而變小，

而且$sin\theta$在第二象限仍是正值。

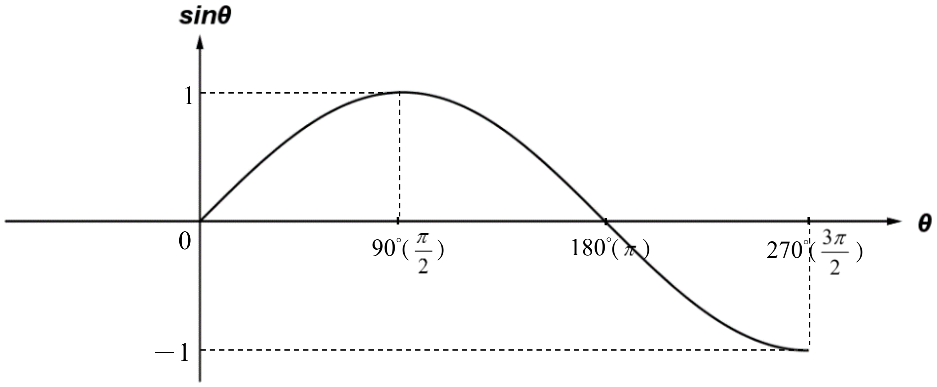


第三象限

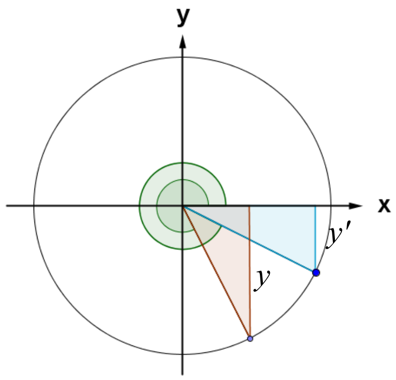


在第三象限，當θ增大時，$|y|$也變大，但y是負值，所以$sin\theta=\frac{y}{r}$

會隨著θ變大而越來越小，而且$sin\theta$在第三象限是負值。

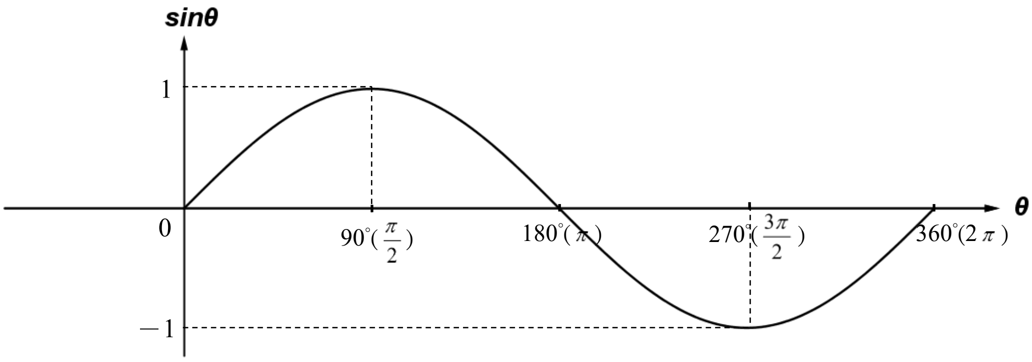


第四象限



在第四象限，當θ增大時，$|y|$也變大，但y是負值，所以$sin\theta=\frac{y}{r}$

會隨著θ變大而變大，而且$sin\theta$在第四象限仍是負值。

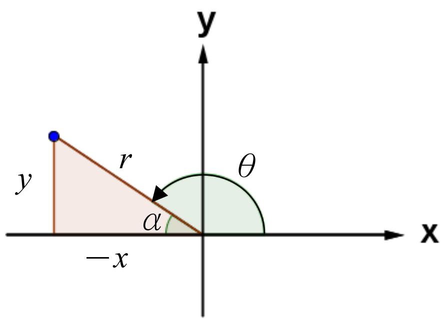


廣義角和銳角有關三角函數的關係

我們如果知道了銳角的三角函數，就可以知道所有廣義角的三角函數。

第二象限

$$90° \leq \theta \leq 180°$$



$\alpha = 180° - \theta$

$\sin\theta = \sin\alpha = \sin(180° - \theta)$

$\cos\theta = -\cos\alpha = -\cos(180° - \theta)$，因為 x 為負

$\tan\theta = -\tan\alpha = -\tan(180° - \theta)$，因為 x 為負

例：$\theta = 120°$

$\alpha = 180° - 120° = 60°$

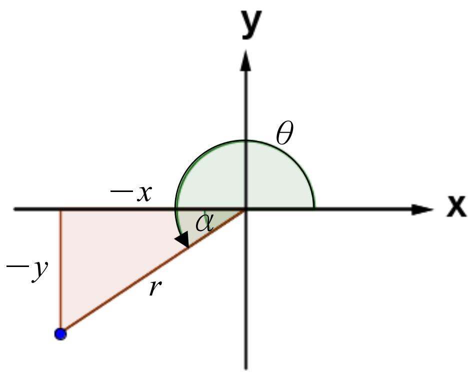
$\therefore \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

第三象限

$$180° \leq \theta \leq 270°$$



$\alpha = \theta - 180°$

$sin\,\theta = -sin(\theta - 180°) = -sin\,\alpha$，因為 y 為負

$cos\,\theta = -cos(\theta - 180°) = -cos\,\alpha$，因為 x 為負

$tan\,\theta = tan(\theta - 180°) = tan\,\alpha$，因為 x、y 皆為負

例：$\theta = 240°$

$\alpha = \theta - 180° = 240° - 180° = 60°$

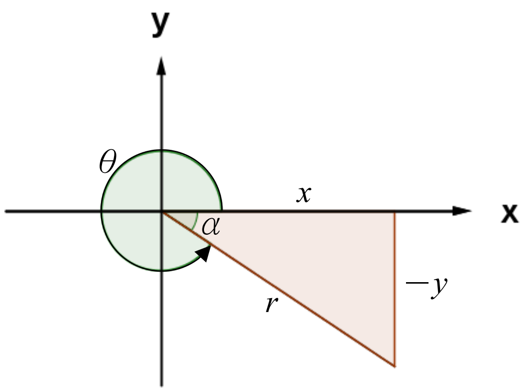
$\therefore sin240° = -sin60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos240° = -cos60° = -\frac{1}{2}$

$tan240° = tan60° = \sqrt{3}$

第四象限

$$270° < \theta \leq 360°$$



$\alpha = 360° - \theta$

$sin\,\theta = -sin\,\alpha = -sin(360° - \theta)$
$cos\,\theta = cos\,\alpha = cos(360° - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(360° - \theta) = -tan\,\alpha$

例：$\theta = 330°$

$\alpha = 360° - 330° = 30°$

$\therefore sin330° = -sin30° = -\frac{1}{2}$

$cos330° = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan330° = -tan30° = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

我們可以將以上的討論總結如下：

(1) 第二象限

$90^\circ < \theta < 180^\circ$
$sin\,\theta = sin(\,180^\circ - \theta)$
$cos\,\theta = -cos(\,180^\circ - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(\,180^\circ - \theta)$

(2) 第三象限

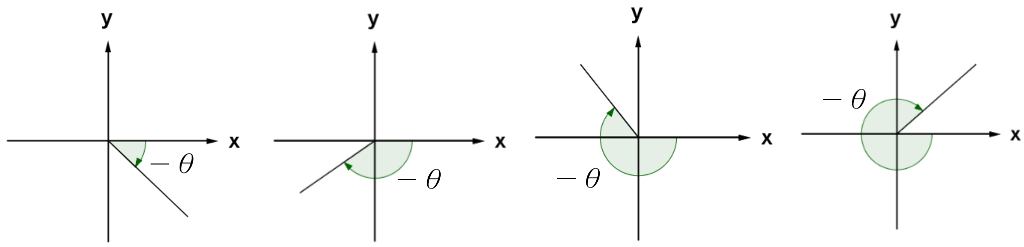
$180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$
$sin\,\theta = -sin(\,\theta - 180^\circ)$
$cos\,\theta = -cos(\,\theta - 180^\circ)$
$tan\,\theta = tan(\,\theta - 180^\circ)$

(3) 第四象限

$270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
$sin\,\theta = -sin(\,360^\circ - \theta)$
$cos\,\theta = cos(\,360^\circ - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(\,360^\circ - \theta)$

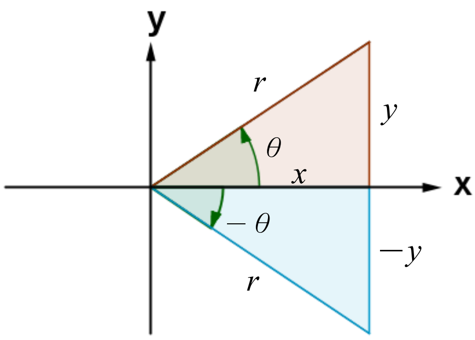
負角的三角函數

負角是指終邊的旋轉是順時針方向的，如下圖所示



$-\theta$的三角函數是有關的。

第四象限

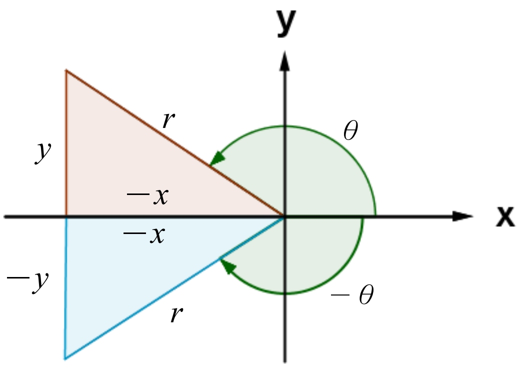


我們可知 $sin(-\theta) = -sin\theta$

$cos(-\theta) = cos\theta$

$tan(-\theta) = -tan\theta$

第三象限

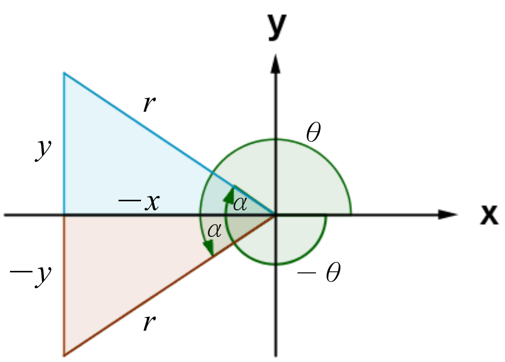


我們可知 $\quad sin(-\theta) = -sin\theta$

$$cos(-\theta) = cos\theta$$

$$tan(-\theta) = -tan\theta$$

第二象限

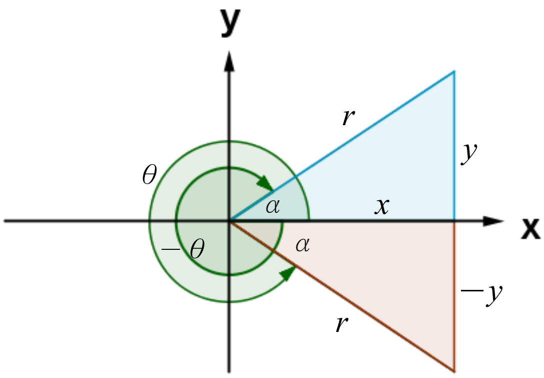


我們可知 $\quad sin(-\theta) = -sin\theta$

$$cos(-\theta) = cos\theta$$

$$tan(-\theta) = -tan\theta$$

第一象限



我們可知 $sin(-\theta) = -sin\theta$

$cos(-\theta) = cos\theta$

$tan(-\theta) = -tan\theta$

結論：

$sin(-\theta) = -sin\theta$

$cos(-\theta) = cos\theta$

$tan(-\theta) = -tan\theta$