

(04) 求交點

1. 求 $y=(x-2)^2-1$ 與 x 軸的交點。

解：

$$\text{令 } y=0$$

$$(x-2)^2-1=0$$

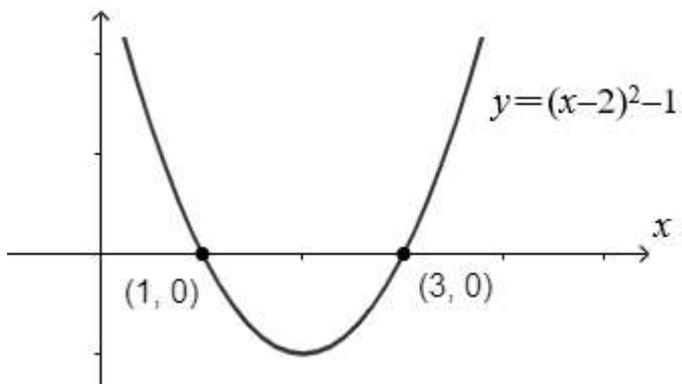
$$(x-2)^2=1$$

$$x-2=\pm 1$$

$$x-2=\pm 1+2$$

若 $x=1+2=3$ ，則交點為 $(3,0)$

若 $x=(-1)+2=1$ ，則交點為 $(1,0)$



2 (1)求 $y=(x-2)^2+1$ 與 x 軸的交點。

(2)求 $y=(x-2)^2+1$ 與 y 軸的交點。

解：

(1)

令 $y=0$

$$(x-2)^2+1=0$$

$$(x-2)^2=-1$$

平方數不會為負，因此沒有 x 的實數解，此曲線和 x 軸不相交

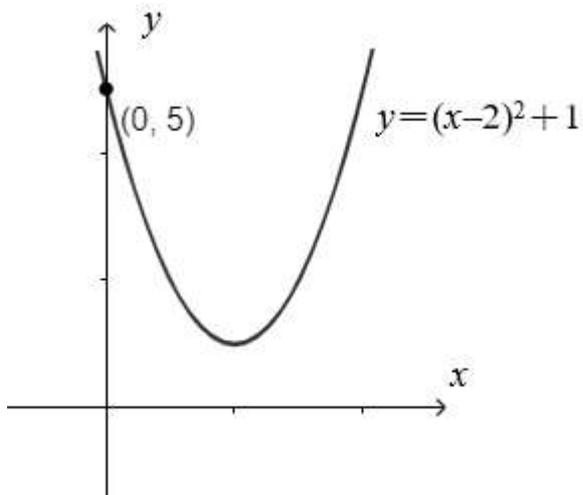
(2)

令 $x=0$

$$(-2)^2+1=y$$

$$y=4+1$$

$y=5$ ，交點為 $(0,5)$



3. 求 $y=(x-1)^2-3$ 與 $y=x$ 的交點。

解：

將 $y=x$ 代入 $y=(x-1)^2-3$

$$x=(x-1)^2-3$$

$$x=x^2-2x+1-3$$

$$x^2-3x-2=0$$

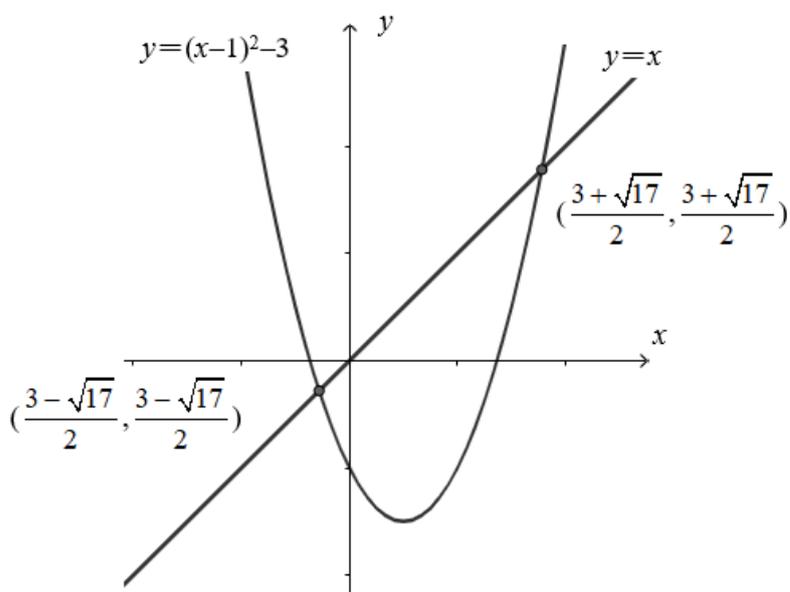
$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \quad (\text{使用公式解})$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

若 $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ，則交點為 $(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$

若 $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ ，則交點為 $(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$



4. 求 $y=(x-1)^2+3$ 與 $y=2x-3$ 的交點。

解：

利用兩方程式的 y 相等：

$$(x-1)^2+3=2x-3$$

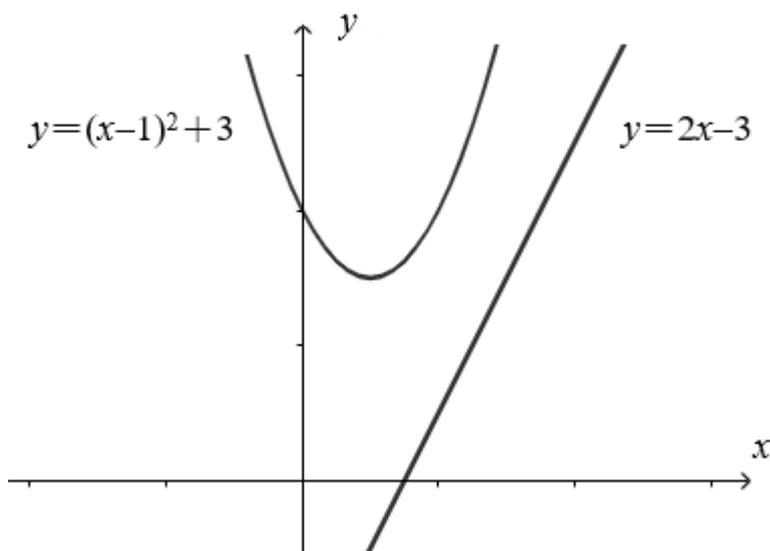
$$x^2-2x+1+3=2x-3$$

$$x^2-4x+7=0$$

利用判別式 b^2-4ac

$$(-4)^2-4\times 1\times 7=-12<0$$

故無交點



5. 求 $y=(x-1)^2+3$ 與 $x+y=4$ 的交點。

解：

$$x+y=4 \text{ 移項得 } y=4-x$$

再利用兩方程式的 y 相等：

$$(x-1)^2+3=4-x$$

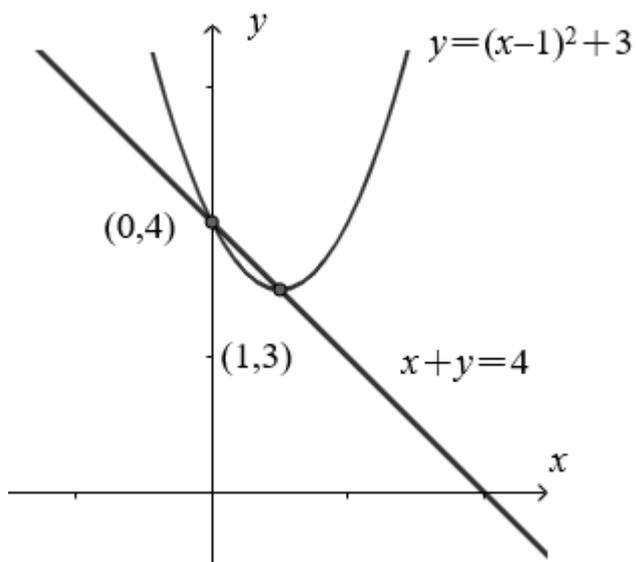
$$x^2-2x+1+3=4-x$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

若 $x=0$ ， $y=4$ 則交點為 $(0,4)$

若 $x=1$ ， $y=3$ 則交點為 $(1,3)$



6. 求 $y=(x-1)^2-1$ 與 $y=(x+1)^2+1$ 的交點。

解：

利用兩方程式的 y 相等：

$$(x-1)^2-1=(x+1)^2+1$$

$$x^2-2x+1-1=x^2+2x+1+1$$

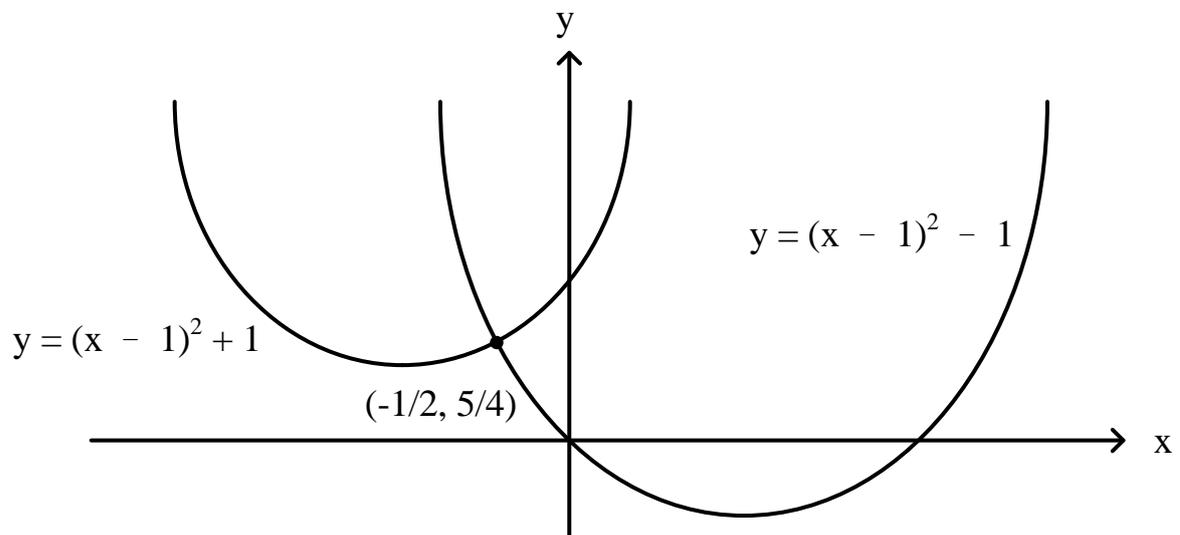
$$-2x=2x+2$$

$$-4x=2$$

$$x=-\frac{1}{2}, \text{ 代入 } y=(x-1)^2-1$$

$$y=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2-1=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{9}{4}-\frac{4}{4}=\frac{5}{4}$$

交點為 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$



8. 求一元二次方程式求 $x^2-6x+11=0$ 的解。

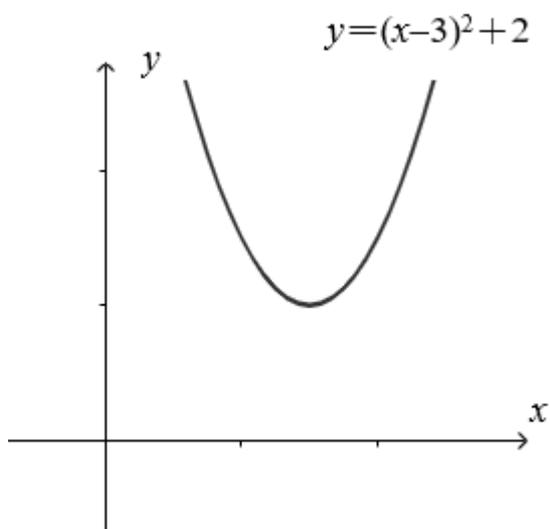
解：

利用剛剛兩方程式的 y 相等的經驗，我們可以將方程式 $x^2-6x+11=0$ 想像是

求 $y=x^2-6x+11$ 和 $y=0$ (x 軸) 的交點

$$\text{令 } y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$$

圖形為：



圖形與 x 軸不相交，因此無解

也可以用判別式 b^2-4ac 來看

$$b^2-4ac$$

$$=(-6)^2-4\times 1\times 11$$

$$=36-44$$

$$=-8$$

$b^2-4ac<0$ ，故無解