目　錄

第九章 面積周長與體積

9.1 節　多邊形面積

定義 9.1-1 單位面積

一單位邊長的正方形為一單位面積。

單位邊長為 1 公分的正方形，其單位面積為 1 平方公分(1 公分 × 1 公分)，如下圖 9.1-1(a)所示；若單位邊長為 1 公尺的正方形，其單位面積為 1 平方公尺(1 公尺 × 1 公尺)，如下圖 9.1-1(b)所示。

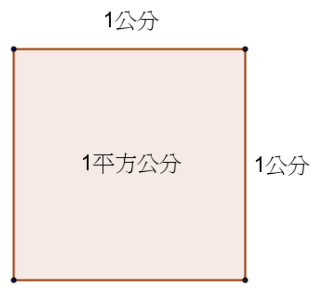


圖 9.1-1(a)　1 平方公分

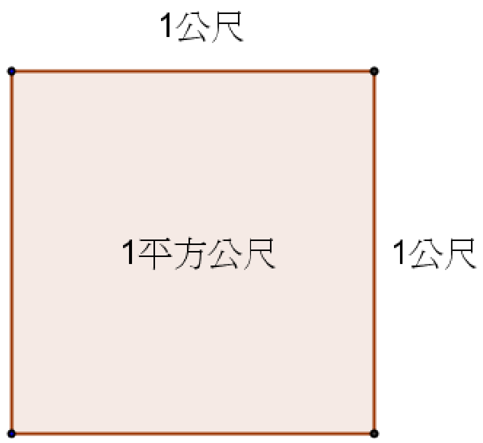


圖 9.1-1(b)　1 平方公尺

定義 9.1-2 面積

一個幾何圖形的面積，就是這個圖形所包含單位面積的數量。

定義 9.1-3 等面積圖形(等積形)

面積相等的圖形，叫做等面積圖形或等積形。

定理 9.1-1 長方形(矩形)面積定理

矩形面積等於長與寬的乘積。

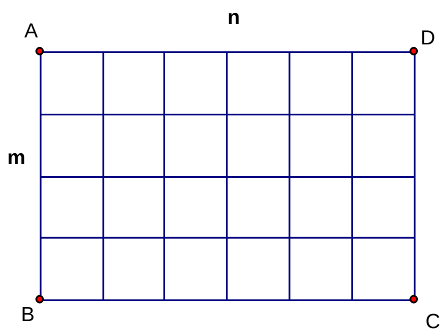


圖 9.1-2 矩形

已知：ABCD 為矩形，$\overline{AB}$為長，$\overline{AD}$為寬，如圖 9.1-2。
求證：矩形 ABCD 面積＝$\overline{AB}\times\overline{AD}$。

想法： 以$\overline{AB}$與$\overline{AD}$的公因數作為單位長，將長方形分成若干個單位面積。

證明：

敘述	理由
(1) 如圖 9.1-2，取$\overline{AB}$與$\overline{AD}$的公因數 u 作為單位長，假設$\overline{AB}$＝m×u，$\overline{AD}$＝n×u，將$\overline{AB}$分成 m 等分，$\overline{AD}$分成 n 等分。	假設 & 等分線段作圖
(2) 過$\overline{AB}$上各分個點，作$\overline{AD}$的平行線，又過$\overline{AD}$上的各個分點作$\overline{AB}$的平行線，則將矩形分成 m×n 個單位面積，每單位面積為 u×u，如圖 9.1-2 所示。	平行線作圖
(3) 所以矩形 ABCD 面積＝(m×n)×(u×u)	面積的定義
＝(m×u)×(n×u)	乘法交換律 & 結合律
＝$\overline{AB}\times\overline{AD}$	由(1) 假設$\overline{AB}$＝m×u，$\overline{AD}$＝n×u

Q. E. D.

例題 9.1-1：

如圖 9.1-3，ABCD 為矩形，$\overline{AB}$＝3 公分，$\overline{AD}$＝4 公分，則矩形 ABCD 的面積為何？

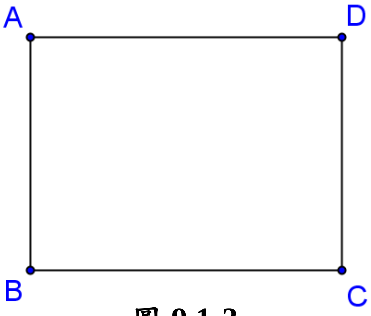


圖 9.1-3

想法：矩形面積定理：矩形面積等於長與寬的乘積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 的面積 ＝$\overline{AB}\times\overline{AD}$ ＝(3 公分)×(4 公分) ＝12 平方公分	已知 ABCD 為矩形，$\overline{AB}$＝3 公分，$\overline{AD}$＝4 公分 & 矩形面積等於長與寬的乘積

例題 9.1-2：

如圖 9.1-4，矩形 ABCD 的面積為 24 平方公分，已知$\overline{AB}$＝4 公分，則$\overline{AD}$＝______

圖 9.1-4

想法：矩形面積定理：矩形面積等於長與寬的乘積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 的面積＝$\overline{AB}\times\overline{AD}$	已知 ABCD 為矩形 & 矩形面積等於長與寬的乘積
(2) 24 平方公分＝4 公分×$\overline{AD}$	由(1) & 已知矩形 ABCD 的面積為 24 平方公分，$\overline{AB}$＝4 公分
(3) $\overline{AD}$＝(24 平方公分)÷(4 公分) ＝6 公分	由(2) 等量除法公理

有了長方形面積定理，很容易可以證明正方形面積定理。

定理 9.1-2 正方形面積定理

正方形面積等於邊長的平方。

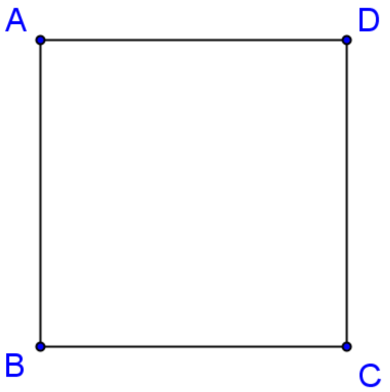


圖 9.1-5 正方形

已知：ABCD 為正方形，如圖 9.1-5
求證：正方形 ABCD 面積$=\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CD}^2=\overline{DA}^2$

想法：利用矩形面積定理來證明
證明：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積$=\overline{AB}\times\overline{BC}$	已知 ABCD 為正方形 & 正方形亦為矩形 & 矩形面積等於長與寬的乘積
(2) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$	已知 ABCD 為正方形 & 正方形四邊等長
(3) 正方形 ABCD 面積 $=\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CD}^2=\overline{DA}^2$	由(1) & (2) 代換

Q. E. D.

例題 9.1-3：

如圖 9.1-6，已知 ABCD 為邊長為 3 公分的正方形，則正方形 ABCD 面積為？

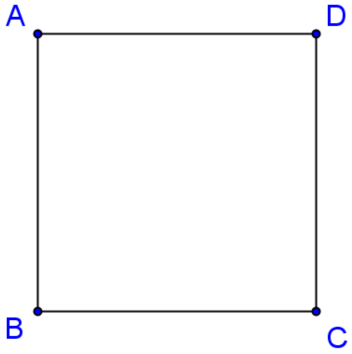


圖 9.1-6

想法：正方形面積等於邊長的平方

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積 $=(3\text{ 公分})^2=9$ 平方公分	已知 ABCD 為邊長為 3 公分的正方形 & 正方形面積等於邊長的平方

例題 9.1-4：

如圖 9.1-7，已知正方形 ABCD 面積為 16 平方公分，則$\overline{AB}=$？

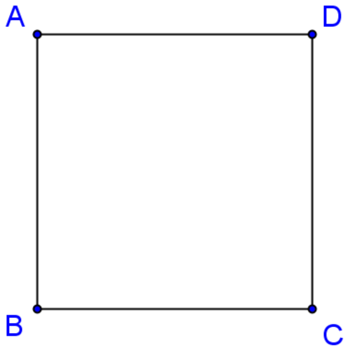


圖 9.1-7

想法：正方形面積等於邊長的平方

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積$=\overline{AB}^2$	已知 ABCD 為正方形 & 正方形面積等於邊長的平方
(2) 16 平方公分$=\overline{AB}^2$	由(1) & 已知正方形 ABCD 面積為 16 平方公分
(3) $\overline{AB}=-4$ 公分 或 $\overline{AB}=4$ 公分	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AB}=4$ 公分	由(3) & $\overline{AB}$為邊長必為正數

定理 9.1-3 平行四邊形面積定理

平行四邊形面積等於底與高之乘積。

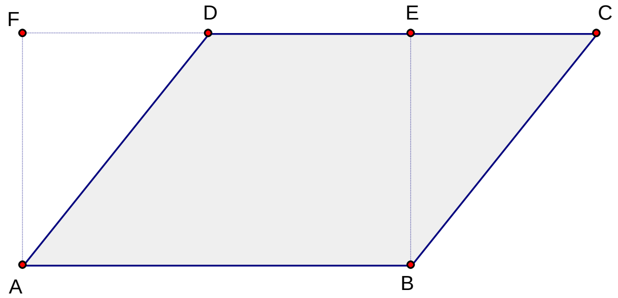


圖 9.1-8

已知：平行四邊形 ABCD 中，$\overline{BE}\perp\overline{AB}$，$\overline{AB}$為底，$\overline{BE}$為高。

求證：平行四邊形 ABCD 的面積＝$\overline{AB}\times\overline{BE}$。

想法：作以$\overline{AB}$為長，$\overline{BE}$為高的長方形 ABEF，證明平行四邊形 ABCD 與長方形 ABEF 的面積相等。

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 點，作$\overline{AF}\perp\overline{AB}$交$\overline{CD}$的延長線於 F 點。(如圖 9.1-8)	垂直線作圖
(2) $\overline{AF}\parallel\overline{BE}$	由(1) $\overline{AF}\perp\overline{AB}$ ＆ 已知$\overline{BE}\perp\overline{AB}$ ＆ 垂直同一直線的兩直線平行
(3) 四邊形 ABEF 為平行四邊形	已知 ABCD 為平行四邊形，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ ＆ (2) $\overline{AF}\parallel\overline{BE}$ 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) ∠F＝∠ABE＝90° ∠BEF＝∠BAF＝90°	由(1) $\overline{AF}\perp\overline{AB}$ ＆已知$\overline{BE}\perp\overline{AB}$ ＆ (3) 平行四邊形對角相等
(5) 四邊形 ABEF 為矩形	由(3) ＆ (4) 四個角都為直角的平行四邊形為矩形
(6) 矩形 ABEF 面積＝$\overline{AB}\times\overline{BE}$	由(5) ＆ 長方形面積等於長與寬的乘積
(7) 在△AFD 與△BEC 中 $\overline{AF}=\overline{BE}$ ∠F＝∠BEC＝90° $\overline{AD}=\overline{BC}$	如圖 9.1-8 所示 由(5) ＆ 長方形對邊等長 由(5) ＆ 長方形四個角皆為 90° 已知 ABCD 為平行四邊形 ＆ 對邊等長
(8) △AFD ≅ △BEC	由(7) ＆ 根據三角形 R.H.S.全等定理

(9) ABED 面積＋△BEC 面積 ＝ABED 面積＋△AFD 面積	由(8) & 等量加同量其和相等
(10) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝長方形 ABEF 面積	由(9) 代換
(11) 平行四邊形 ABCD 的面積 ＝$\overline{AB}\times\overline{BE}$	由(6) & (10) 遞移律

Q. E. D.

例題 9.1-5：

如圖 9.1-9，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且$\overline{BC}$＝5 公分，$\overline{CE}$＝3 公分，則平行四邊形 ABCD 面積為？

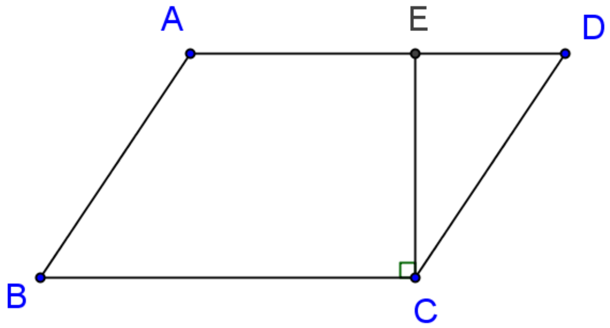


圖 9.1-9

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{CE}$ ＝(5 公分)×(3 公分) ＝15 平方公分	已知 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$ 且$\overline{BC}$＝5 公分，$\overline{CE}$＝3 公分 & 平行四邊形面積等於底與高之乘積

例題 9.1-6：

如圖 9.1-10，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}=12$，$\overline{DE}=8$，求平行四邊形 ABCD 的面積。

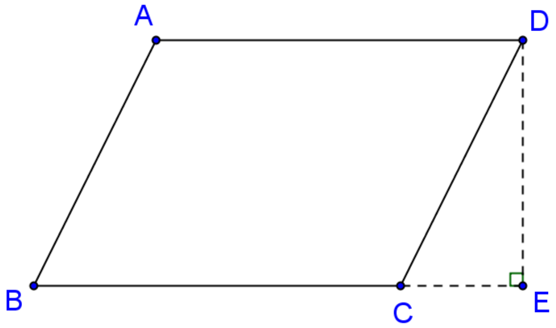


圖 9.1-10

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積 $=\overline{BC}\times\overline{DE}$ $=(12$ 公分$)\times(8$ 公分$)$ $=96$ 平方公分	已知 ABCD 為平行四邊形，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$ 且$\overline{BC}=12$ 公分，$\overline{DE}=8$ 公分 & 平行四邊形面積等於底與高之乘積

例題 9.1-7：

如圖 9.1-11，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且平行四邊形 ABCD 面積＝20 平方公分，$\overline{BC}$＝5 公分，則$\overline{CE}$＝？

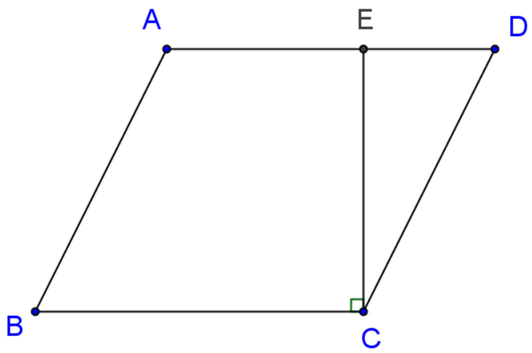


圖 9.1-11

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積＝$\overline{BC}\times\overline{CE}$	已知已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$ & 平行四邊形面積等於底與高之乘積
(2) 20 平方公分＝5 公分×$\overline{CE}$	由(1) & 已知平行四邊形 ABCD 面積＝20 平方公分，$\overline{BC}$＝5 公分
(3) $\overline{CE}$＝(20 平方公分)÷(5 公分) ＝4 公分	由(2) 等量除法公理

例題 9.1-8：

如圖 9.1-12，平行四邊形 ABCD 的周長為 40 公分，$\overline{AE}\perp\overline{CD}$，若$\overline{AD}=8$ 公分，$\overline{AE}=6$ 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

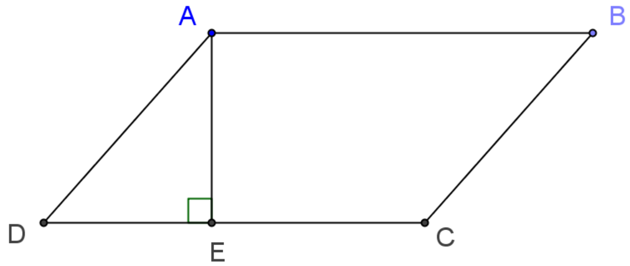


圖 9.1-12

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$ 且 $\overline{BC}=\overline{AD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對邊相等
(2) $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}=40$ 公分	已知平行四邊形 ABCD 周長為 40 公分
(3) $\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AD}=40$ 公分	由(1) & (2) 代換
(4) $2(\overline{AD}+\overline{CD})=40$ 公分	由(3) 式子整理
(5) $\overline{AD}+\overline{CD}=(40$ 公分$)\div2=20$ 公分	由(4) 等量除法公理
(6) $\overline{CD}=20$ 公分$-\overline{AD}$ $=20$ 公分-8 公分$=12$ 公分	由(5) 等量減法公理 & 已知$\overline{AD}=8$ 公分
(7) 平行四邊形 ABCD 面積 $=\overline{CD}\times\overline{AE}$ $=(12$ 公分$)\times(6$ 公分$)$ $=72$ 平方公分	已知已知四邊形 ABCD 為平行四邊形， $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & 平行四邊形面積等於底與高之乘積 & (6) $\overline{CD}=12$ 公分 已證 & 已知$\overline{AE}=6$ 公分

定理 9.1-4 三角形面積定理

三角形面積等於底與高之乘積的一半。

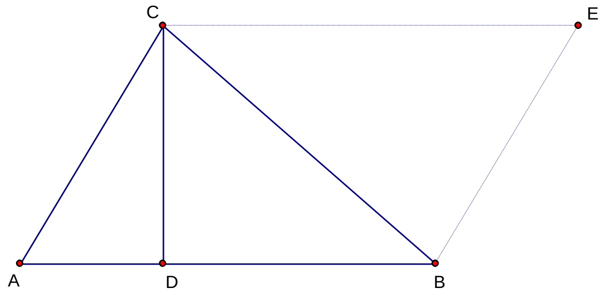


圖 9.1-13

已知：△ABC 中，$\overline{AB}$為底，$\overline{CD}$為高，$\overline{AB}\perp\overline{CD}$。

求證：△ABC 的面積＝$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{2}$ 。

想法： 作以$\overline{AB}$為底、$\overline{CD}$為高的平行四邊形 ABEC，證明△ABC 面積為平行四邊形的一半。

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{BE}\parallel\overline{AC}$，$\overline{CE}\parallel\overline{AB}$，$\overline{BE}$與$\overline{CE}$兩線交於 E 點，如圖 9.1-13	平行線作圖
(2) ABEC 為以$\overline{AB}$為底，$\overline{CD}$為高的平行四邊形	由(1) & 兩組對邊平行為平行四邊形 & 已知$\overline{AB}\perp\overline{CD}$
(3) 平行四邊形 ABEC 的面積＝$\overline{AB}\times\overline{CD}$	由(2) & 平行四邊形面積定理
(4) 在△ABC 與△ECB 中 $\overline{AB}=\overline{EC}$ $\overline{AC}=\overline{EB}$ $\overline{BC}=\overline{CB}$	如圖所示 由(2) & 平行四邊形對邊相等 由(2) & 平行四邊形對邊相等 共同邊
(5) △ABC ≅ △ECB	由(4) & 根據三角形 S.S.S.全等定理
(6) △ABC＝△ECB ＝$\dfrac{1}{2}$ABEC	由(5) & 全量等於分量之和
(7) △ABC 的面積＝$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{2}$	由(3) & (6)

Q. E. D.

由**定理 9.1-4 三角形面積定理**的證明中，我們可以得到以下兩個結果：

1. 三角形面積等於底與高之乘積的一半。

2. 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形。

接著，讓我們將**定理 9.1-4 三角形面積定理**，應用在例題 9.1-9~例題 9.1-11。

例題 9.1-9：

如圖 9.1-14，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}=7$ 公分，$\overline{AD}=4$ 公分，則△ABC 面積為何？

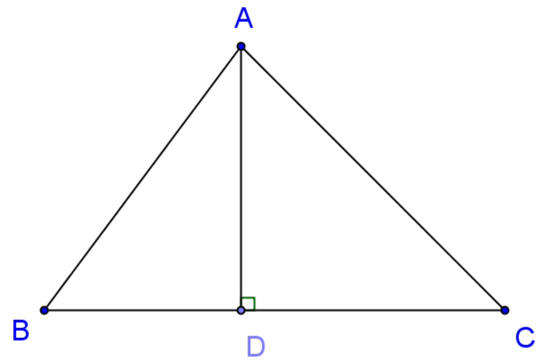


圖 9.1-14

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積$=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$ $=\dfrac{(7公分)\times(4公分)}{2}$ $=14$ 平方公分	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}=7$ 公分，$\overline{AD}=4$ 公分 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半

例題 9.1-10：

如圖 9.1-15，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝3 公分，$\overline{CD}$＝4 公分，$\overline{AD}$＝5 公分，則△ABC 面積為何？

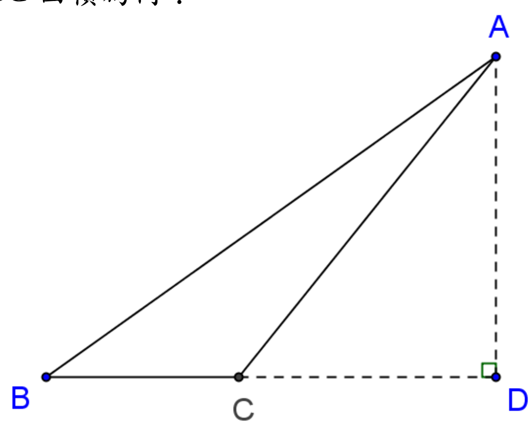


圖 9.1-15

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積$=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$ $=\dfrac{(3公分)\times(5公分)}{2}$ ＝7.5 平方公分	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}$＝3 公分，$\overline{AD}$＝5 公分 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半

例題 9.1-11：

如圖 9.1-16，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}=6$ 公分，△ABC 面積為 12 平方公分，則$\overline{AD}=$？

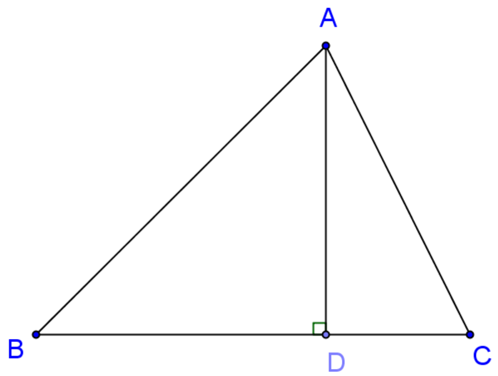


圖 9.1-16

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積$=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) 12 平方公分$=\dfrac{(6公分)\times\overline{AD}}{2}$	由(1) & 已知$\overline{BC}=6$ 公分，△ABC 面積為 12 平方公分
(3) $\overline{AD}\times(6$ 公分$)=(12$ 平方公分$)\times 2$	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{AD}=\dfrac{(12平方公分)\times 2}{6公分}=4$ 公分	由(3) 等量除法公理

以下，我們來練習一些特殊三角形面積的求法。

例題 9.1-12：　(30°-90°-60°的直角三角形)

如圖 9.1-17，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠A＝60°，∠C＝90°，且$\overline{AB}$＝10 公分，則△ABC 面積為何？

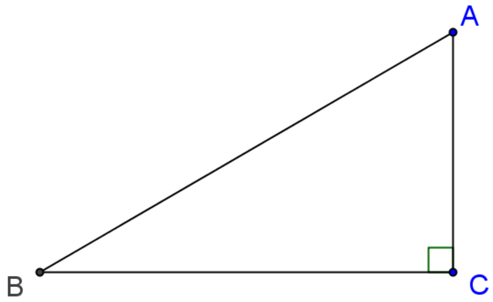


圖 9.1-17

想法：(1)　利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1∶2∶$\sqrt{3}$，求出$\overline{AC}$與$\overline{BC}$

(2)　三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　$\overline{AC}$：$\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝1：2：$\sqrt{3}$	已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠A＝60°，∠C＝90°　&　30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(2)　$\overline{AC}$：(10 公分)＝1：2	由(1)　$\overline{AC}$：$\overline{AB}$＝1：2　&　已知$\overline{AB}$＝10 公分
(3)　2×$\overline{AC}$＝1× (10 公分)	由(2)　&　外項乘積等於內項乘積
(4)　$\overline{AC}$＝(10 公分)÷2＝5 公分	由(3)　等量除法公理
(5)　(10 公分)：$\overline{BC}$＝2：$\sqrt{3}$	由(1)　$\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝2：$\sqrt{3}$　&　已知$\overline{AB}$＝10 公分
(6)　2×$\overline{BC}$＝$\sqrt{3}$×(10 公分)	由(5)　&　內項乘積等於外項乘積
(7)　$\overline{BC}$＝$\sqrt{3}$×(10 公分)÷ 2 ＝5$\sqrt{3}$ 公分	由(6)　等量除法公理
(8)　△ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(5\text{公分})\times(5\sqrt{3}\text{公分})}{2}$ $=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半　&　(4)　$\overline{AC}$＝5 公分　&　(7)　$\overline{BC}$＝5$\sqrt{3}$ 公分　　已證

例題 9.1-13：（30°-90°-60°的直角三角形）

如圖 9.1-18，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠C＝60°，∠CAB＝90°，且$\overline{AM}\perp\overline{BC}$，$\overline{AM}$＝3 公分，則△ABC 面積為何？

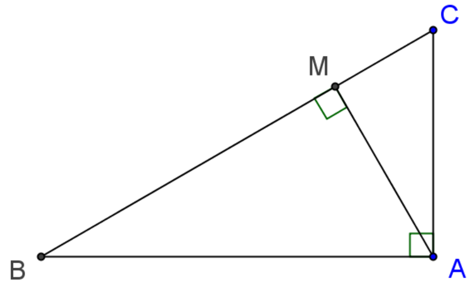


圖 9.1-18

想法：(1)　利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1∶2∶$\sqrt{3}$，求出$\overline{AB}$與$\overline{AC}$

(2)　三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △BAM 中， ∠MAB＋∠B＋∠AMB＝180°	如圖 9.1-18 所示 三角形內角和 180°
(2) ∠MAB＝180°－∠B－∠AMB ＝180°－30°－90°＝60°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠B＝30° & $\overline{AM}\perp\overline{BC}$，∠AMB＝90°
(3) △BAM 為 30°-90°-60°的直角三角形	已知∠B＝30° & (2) ∠MAB＝60° 已證 & 已知$\overline{AM}\perp\overline{BC}$，∠AMB＝90°
(4) $\overline{AM}$：$\overline{AB}$：$\overline{BM}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(3) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(5) (3 公分) ：$\overline{AB}$＝1：2	由(4) $\overline{AM}$：$\overline{AB}$＝1：2 & 已知$\overline{AM}$＝3 公分
(6) $\overline{AB}$＝2×3 公分＝6 公分	由(5) & 內項乘積等於外項乘積
(7) △ACM 中， ∠CAM＋∠C＋∠AMC＝180°	如圖 9.1-18 所示 三角形內角和 180°
(8) ∠CAM＝180°－∠C－∠AMC ＝180°－60°－90°＝30°	由(7) 等量減法公理 & 已知∠C＝60° & $\overline{AM}\perp\overline{BC}$，∠AMC＝90°
(9) △ACM 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(8) ∠CAM＝30° 已證 & 已知$\overline{AM}\perp\overline{BC}$，∠AMC＝90° & ∠C＝60°
(10) $\overline{CM}$：$\overline{AC}$：$\overline{AM}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(9) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$

(11) $\overline{AC}$：(3 公分)＝2：$\sqrt{3}$	由(10) $\overline{AC}$：$\overline{AM}$＝2：$\sqrt{3}$ & 已知$\overline{AM}$＝3 公分
(12) $\sqrt{3}\times\overline{AC}$＝2×(3 公分)	由(11) & 外項乘積等於內項乘積
(13) $\overline{AC}=\dfrac{2\times(3\text{公分})}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ 公分	由(12) 等量除法公理
(14) △ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{2}$ $=\dfrac{(6\text{公分})\times(2\sqrt{3}\text{公分})}{2}$ $=6\sqrt{3}$ 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (6) $\overline{AB}$＝6 公分 & (13) $\overline{AC}=2\sqrt{3}$ 公分 已證

例題 9.1-14：（45°-45°-90°的等腰直角三角形)

如圖 9.1-19，已知△ABC 為等腰直角三角形，若$\overline{AB}$＝10 公分，則△ABC 面積為何？

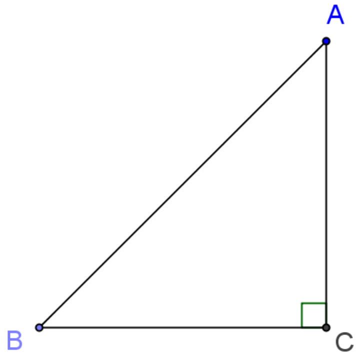


圖 9.1-19

想法：(1) 利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$，求出$\overline{BC}$與$\overline{AC}$

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}$：$\overline{BC}$：$\overline{AB}$＝1：1：$\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(2) $\overline{BC}$：(10 公分)＝1：$\sqrt{2}$	由(1) $\overline{BC}$：$\overline{AB}$＝1：$\sqrt{2}$ & 已知$\overline{AB}$＝10 公分
(3) $\sqrt{2}\times\overline{BC}$＝1× (10 公分)	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) $\overline{BC}=\dfrac{10\text{公分}}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\text{公分}$	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{AC}=\overline{BC}=5\sqrt{2}\text{公分}$	由(1) $\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：1 & (4) $\overline{BC}=5\sqrt{2}\text{公分}$
(6) △ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(5\sqrt{2}\text{公分})\times(5\sqrt{2}\text{公分})}{2}$ ＝25 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (5) $\overline{AC}=\overline{BC}=5\sqrt{2}\text{公分}$ 已證

例題 9.1-15：（45°-45°-90°的等腰直角三角形)

如圖 9.1-20，已知△ABC 為等腰直角三角形，∠C＝90°，若△ABC 面積為 50 平方公分，則$\overline{AB}$＝？

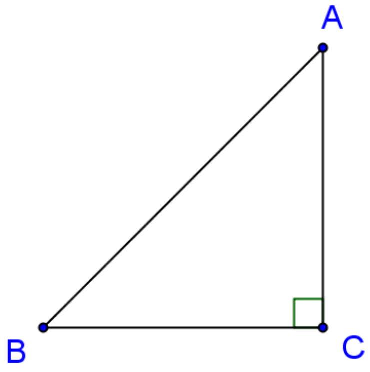


圖 9.1-20

想法：(1) 利用三角形面積等於底與高之乘積的一半求出$\overline{BC}$的長度

(2) 再利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$，求出$\overline{AB}$之值

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形，∠C＝90° & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) 50 平方公分＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{2}$	由(1) & 已知△ABC 面積為 50 平方公分 & △ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}^2$＝(50 平方公分)x2	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BC}$＝10 公分 或 $\overline{BC}$＝－10 公分	由(3) 求平方根
(5) $\overline{BC}$＝10 公分	由(4) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(7) (10 公分)：$\overline{AB}=1:\sqrt{2}$	由(6) $\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$ & (5) $\overline{BC}$＝10 公分 已證
(8) $\overline{AB}=\sqrt{2}\times$(10 公分) ＝$10\sqrt{2}$ 公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積

例題 9.1-16：　（利用等腰直角三角形的性質解題）

如圖 9.1-21，正方形 ABCD 中，邊長為 8 公分，E、F、G、H 為各邊中點，則四邊形 EFGH 為______________形，面積為______________。

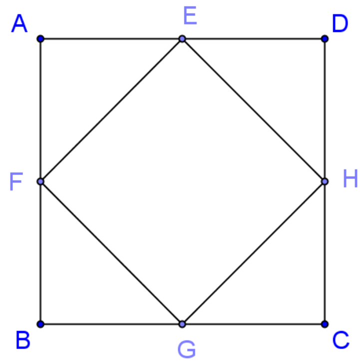


圖 9.1-21

想法：(1) 利用第六章例題 6.2-45 的結論：正方形四邊中點連線所形成的四邊形為正方形

(2) 利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$，求出$\overline{EF}$的長度

(3) 正方形面積等於邊長平方

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 EFGH 為正方形	已知 ABCD 為正方形，E、F、G、H 為各邊中點 & 正方形四邊中點連線所形成的四邊形為正方形
(2) $\overline{AB}=\overline{AD}=8$ 公分，$\angle A=90°$	已知 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形
(3) $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times(8$ 公分$)=4$ 公分	已知 E 為$\overline{AD}$中點 & (2) $\overline{AD}=8$ 公分
(4) $\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times(8$ 公分$)=4$ 公分	已知 F 為$\overline{AB}$中點 & (2) $\overline{AB}=8$ 公分
(5) △AEF 為等腰直角三角形	由(2) $\angle A=90°$ & (3)、(4) $\overline{AE}=\overline{AF}$
(6) $\overline{AE}:\overline{AF}:\overline{EF}=1:1:\sqrt{2}$	由(5) & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$
(7) (4 公分)$:\overline{EF}=1:\sqrt{2}$	由(6) $\overline{AF}:\overline{EF}=1:\sqrt{2}$ & (4) $\overline{AF}=4$ 公分　已證
(8) $\overline{EF}=\sqrt{2}\times(4$ 公分$)=4\sqrt{2}$ 公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積
(9) 正方形 EFGH 面積$=\overline{EF}^2=(4\sqrt{2}$ 公分$)^2=32$ 平方公分	由(1) & 正方形面積等於邊長平方 & (8) $\overline{EF}=4\sqrt{2}$ 公分　已證

例題 9.1-17：（正三角形）

如圖 9.1-22，△ABC 為正三角形，$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高，若$\overline{CD}=6\sqrt{3}$公分則：

(1) $\overline{AB}$＝？

(2) △ABC 的面積為何？

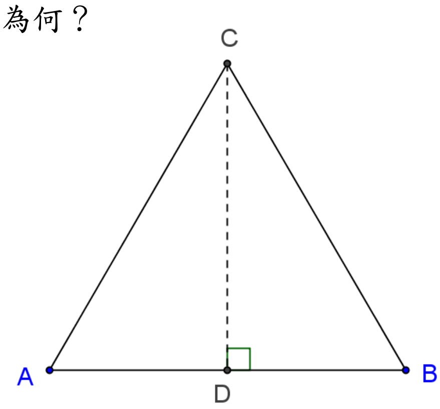


圖 9.1-22

想法： (1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出$\overline{BC}$的長度

(2) 正三角形三邊等長求出$\overline{AB}$

(3) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △CDB 中，∠B＝60°、∠CDB＝90°	已知△ABC 為正三角形 & 正三角形三個內角皆為 60° & 已知$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高
(2) △CDB 中，∠B＋∠CDB＋∠BCD＝180°	如圖 9.1-22 所示 三角形內角和 180°
(3) ∠BCD＝180°－∠B－∠CDB ＝180°－60°－90°＝30°	由(2) 等量減法公理 & 由(1) ∠B＝60°、∠CDB＝90° 已證
(4) △CDB 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(1) & (3) 已證
(5) $\overline{BD}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:2:\sqrt{3}$	由(4) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(6) $\overline{BC}$：($6\sqrt{3}$公分)＝2：$\sqrt{3}$	由(5) $\overline{BC}:\overline{CD}=2:\sqrt{3}$ & 已知$\overline{CD}=6\sqrt{3}$公分
(7) $\sqrt{3}\times\overline{BC}=2\times(6\sqrt{3}$公分$)$	由(6) & 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{BC}=\dfrac{2\times(6\sqrt{3}\text{公分})}{\sqrt{3}}=12$ 公分	由(7) 等量除法公理

(9) $\overline{AB}=\overline{BC}=12$ 公分	已知△ABC 為正三角形 ＆ 正三角形三邊等長 ＆ (8) $\overline{BC}=12$ 公分　已證
(10) △ABC 的面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{2}$ $=\dfrac{(12\text{公分})\times(6\sqrt{3}\text{公分})}{2}$ $=36\sqrt{3}$ 平方公分	已知$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高 ＆ 三角形面積等於底與高之乘積的一半 ＆ (9) $\overline{AB}=12$ 公分 ＆ 已知$\overline{CD}=6\sqrt{3}$ 公分

例題 9.1-18：　（正三角形）

如圖 9.1-23，△ABC 為邊長為 4 公分的正三角形，$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高，則：

(1)　$\overline{CD}$＝？

(2)　△ABC 的面積為何？

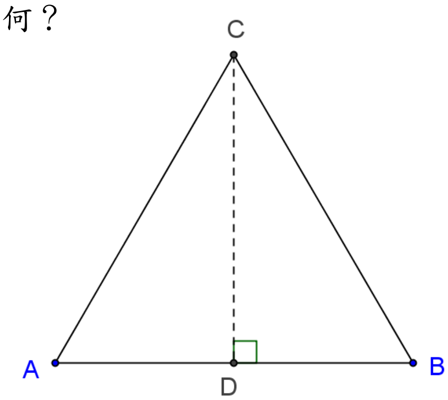


圖 9.1-23

想法： (1)　利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出$\overline{CD}$的長度

(2)　三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　$\overline{AB}$＝$\overline{BC}$＝4 公分	已知△ABC 為邊長為 4 公分的正三角形
(2)　△CDB 中， ∠B＝60°、∠CDB＝90°	已知△ABC 為正三角形 & 正三角形三個內角皆為 60° & 已知$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高
(3)　△CDB 中， ∠B＋∠CDB＋∠BCD＝180°	如圖 9.1-23 所示 三角形內角和 180°
(4)　∠BCD＝180°－∠B－∠CDB ＝180°－60°－90°＝30°	由(3) 等量減法公理 & 由(2) ∠B＝60°、∠CDB＝90°　已證
(5)　△CDB 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(2) & (4) 已證
(6)　$\overline{BD}$：$\overline{BC}$：$\overline{CD}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(5) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(7)　(4 公分)：$\overline{CD}$＝2：$\sqrt{3}$	由(6) $\overline{BC}$：$\overline{CD}$＝2：$\sqrt{3}$ & (1) $\overline{BC}$＝4 公分　已證
(8)　2×$\overline{CD}$＝$\sqrt{3}$×(4 公分)	由(7) & 內項乘積等於外項乘積
(9)　$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{3}\times(4公分)}{2}=2\sqrt{3}$ 公分	由(8) 等量除法公理

(10) $\triangle ABC$ 的面積 $= \dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{2}$ $= \dfrac{(4公分)\times(2\sqrt{3}公分)}{2}$ $=4\sqrt{3}$ 平方公分	已知$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (1) $\overline{AB}=4$ 公分 & (9) $\overline{CD}=2\sqrt{3}$ 公分 已證

例題 9.1-19：（邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位)

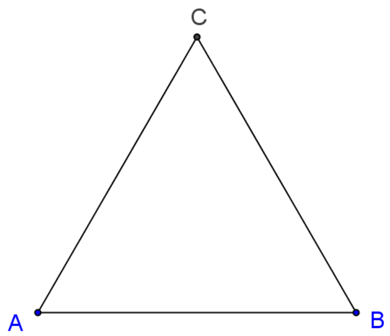


圖 9.1-24

已知：如圖 9.1-24，△ABC 為邊長為 a 單位的正三角形

求證：△ABC 面積＝$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位

想法： (1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出$\overline{AB}$邊上的高$\overline{CD}$

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

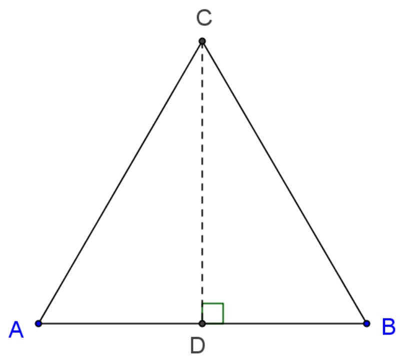


圖 9.1-24(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，如圖 9.1-24(a)	作圖
(2) $\overline{AB}=\overline{BC}=$a 單位	△ABC 為邊長為 a 單位的正三角形
(3) △CDB 中， ∠B＝60°、∠CDB＝90°	已知△ABC 為正三角形 & 正三角形三個內角皆為 60° & (1) 作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$
(4) △CDB 中， ∠B＋∠CDB＋∠BCD＝180°	如圖 9.1-24(a)所示 三角形內角和 180°
(5) ∠BCD＝180°－∠B－∠CDB ＝180°－60°－90°＝30°	由(4) 等量減法公理 & 由(3) ∠B＝60°、∠CDB＝90° 已證

(6) △CDB 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(3) & (5) 已證
(7) $\overline{BD}$：$\overline{BC}$：$\overline{CD}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(6) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(8) (a 單位)：$\overline{CD}$＝2：$\sqrt{3}$	由(7) $\overline{BC}$：$\overline{CD}$＝2：$\sqrt{3}$ & (2) $\overline{BC}$＝a 單位 已證
(9) $2\times\overline{CD}=\sqrt{3}\times$(a 單位)	由(8) & 內項乘積等於外項乘積
(10) $\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{3}\times(\text{a單位})}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$單位	由(9) 等量除法公理
(11) △ABC 的面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{2}=\dfrac{(\text{a單位})\times(\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{單位})}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位	由(1) 作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{CD}$為$\overline{AB}$上的高 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (2) $\overline{AB}$＝a 單位 & (10) $\overline{CD}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$單位 已證

例題 9.1-20：（邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位)

有一個正三角形的邊長為 10 公分，則此正三角形的面積為_______。

想法：邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位

解：

敘述	理由
(1) 此正三角形的面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10\text{公分})^2$ $=25\sqrt{3}$ 平方公分	邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位 & 已知此正三角形邊長為 10 公分

例題 9.1-21： （邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位)

若一正三角形的面積為 $9\sqrt{3}$ 平方公分，則此正三角形的邊長為_____。

想法：邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位

解：

敘述	理由
(1) 假設此正三角形邊長為 a 公分	假設
(2) $9\sqrt{3}$ 平方公分$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位 & 已知正三角形的面積為 $9\sqrt{3}$ 平方公分
(3) $\sqrt{3}a^2=(9\sqrt{3}$ 平方公分$)\times4$	由(2) 等量乘法公理
(4) $a^2=\frac{(9\sqrt{3}\text{平方公分})\times4}{\sqrt{3}}$ ＝36 平方公分	由(3) 等量除法公理
(5) a＝6 公分 或 a＝－6 公分	由(4) 求平方根
(6) a＝6 公分	由(5) & a 為長度必大於 0
(7) 所以此正三角形邊長為 6 公分	由(1) 假設 & (6) a＝6 公分 已證

例題 9.1-22：（直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊）

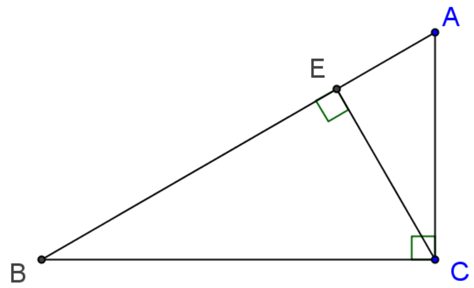


圖 9.1-25

已知： 如圖 9.1-25，已知△ABC 為直角三角形，∠C＝90°，且$\overline{AB}\perp\overline{CE}$

求證： $\overline{CE}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

想法： 三角形面積等於底與高之乘積的一半

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{BC}$為底、$\overline{AC}$為高 △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{2}$	已知△ABC 為直角三角形，∠C＝90° 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) △ABC 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{CE}$為高 △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CE}}}{2}$	已知$\overline{AB}\perp\overline{CE}$ 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(3) $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{2}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CE}}}{2}$	由(1) & (2) 遞移律
(4) $\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{CE}$	由(3) 等量乘法公理
(5) $\overline{CE}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$	由(4) 等量除法公理

例題 9.1-23：（直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊）

如圖 9.1-26，已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，若$\overline{AC}$＝3 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CE}$，則$\overline{CE}$＝？

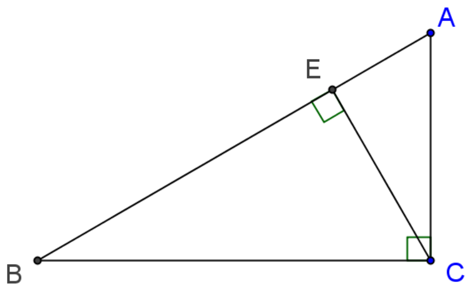


圖 9.1-26

想法：(1) 利用畢氏定理求出斜邊$\overline{AB}$的長度

(2) 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90° & 畢氏定理
(2) $\overline{AB}^2$＝(3 公分)^2＋(4 公分)^2 ＝25 平方公分	由(1) & 已知$\overline{AC}$＝3 公分，$\overline{BC}$＝4 公分
(3) $\overline{AB}$＝5 公分 或 $\overline{AB}$＝－5 公分	由(2) 求平方根
(4) $\overline{AB}$＝5 公分	由(3) & $\overline{AB}$為線段長度必為正
(5) $\overline{CE}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ $=\dfrac{(3\text{公分})\times(4\text{公分})}{5\text{公分}}$ ＝2.4 公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，$\overline{AB}\perp\overline{CE}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊 & 已知$\overline{AC}$＝3 公分，$\overline{BC}$＝4 公分 & (4) $\overline{AB}$＝5 公分 已證

例題 9.1-24：(直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊)

如圖 9.1-27，已知△ABC 為直角三角形，∠B＝30°，∠ACB＝90°，∠A＝60°，若$\overline{AC}$＝3 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

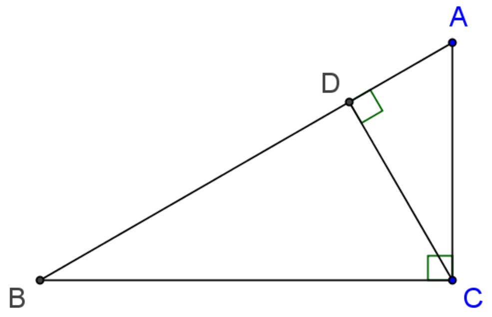


圖 9.1-27

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出斜邊$\overline{AB}$的長度

(2) 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}$：$\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝1：2：$\sqrt{3}$	已知△ABC 為直角三角形，∠B＝30°，∠ACB＝90°，∠A＝60° & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(2) (3 公分)：$\overline{AB}$＝1：2	由(1) $\overline{AC}$：$\overline{AB}$＝1：2 & 已知$\overline{AC}$＝3 公分
(3) $\overline{AB}$＝2×(3 公分)＝6 公分	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) (3 公分)：$\overline{BC}$＝1：$\sqrt{3}$	由(1)$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：$\sqrt{3}$ & 已知$\overline{AC}$＝3 公分
(5) $\overline{BC}$＝$\sqrt{3}$×(3 公分)＝3$\sqrt{3}$ 公分	由(4) & 內項乘積等於外項乘積
(6) $\overline{CD}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}$ $=\dfrac{(3公分)\times(3\sqrt{3}公分)}{6公分}$ $=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊 & 已知$\overline{AC}$＝3 公分 & (5) $\overline{BC}$＝3$\sqrt{3}$ 公分 & (3) $\overline{AB}$＝6 公分 已證

例題 9.1-25：（直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊）

如圖 9.1-28，已知△ABC 為等腰直角三角形，∠ACB＝90°，若△ABC 面積為 50 平方公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

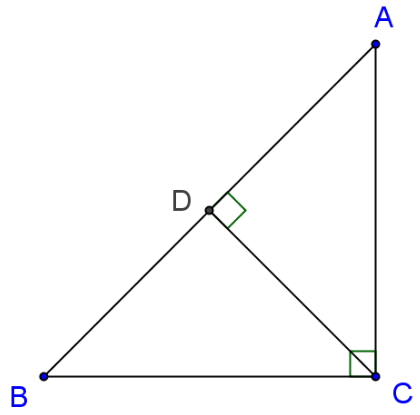


圖 9.1-28

想法：(1) 利用三角形面積等於底與高之乘積的一半，求出$\overline{BC}$的長度

(2) 利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$，求出斜邊$\overline{AB}$的長度

(3) 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形， ∠C＝90° & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) 50 平方公分＝$\frac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{2}$	由(1) & 已知△ABC 面積為 50 平方公分 & △ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}^2$＝(50 平方公分)x2 ＝100 平方公分	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BC}$＝10 公分 或 $\overline{BC}$＝－10 公分	由(3) 求平方根
(5) $\overline{BC}$＝10 公分	由(4) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AC}$：$\overline{BC}$：$\overline{AB}$=1：1：$\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(7) (10 公分)：$\overline{AB}$=1：$\sqrt{2}$	由(6) $\overline{BC}$：$\overline{AB}$=1：$\sqrt{2}$ & (5) $\overline{BC}$＝10 公分 已證
(8) $\overline{AB}$= $\sqrt{2}$×(10 公分) ＝10$\sqrt{2}$ 公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積

(9) $\overline{CD}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ $=\dfrac{(10公分)\times(10公分)}{10\sqrt{2}公分}$ $=5\sqrt{2}$ 公分	已知已知△ABC 為等腰直角三角形， ∠ACB＝90°，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊 & 已知△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$ & 由(5) $\overline{BC}$＝10 公分 & 由(8) $\overline{AB}=10\sqrt{2}$ 公分　已證

接著，讓我們利用**定理 9.1-4 三角形面積定理**，來求菱形與鳶形的面積。

例題 9.1-26： **（菱形面積等於兩對角線乘積的一半）**

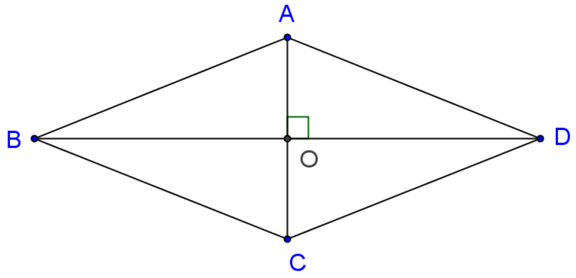


圖 9.1-29

已知：如圖 9.1-29，四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線

求證：菱形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$

想法：(1) 菱形對角線可將此菱形分為兩個三角形

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$	已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 & 例題 6.2-24 菱形兩對角線互相垂直
(2) △ABD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OA}}{2}$	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 已證 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(3) △BCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OC}}{2}$	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 已證 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(4) 菱形 ABCD 面積 ＝△ABD 面積＋△BCD 面積 $=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OA}}{2}+\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OC}}{2}$ $=\dfrac{\overline{BD}\times(\overline{OA}+\overline{OC})}{2}$ $=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	如圖 9.1-29 所示 全量等於分量之和 將(2) & (3) 代入 全量等於分量之和$\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$
(5) 所以菱形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	由(4)

例題 9.1-27：　（菱形面積等於兩對角線乘積的一半）

如圖 9.1-30，已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若$\overline{AC}$＝4 公分，$\overline{BD}$＝10 公分，則菱形 ABCD 面積為何？

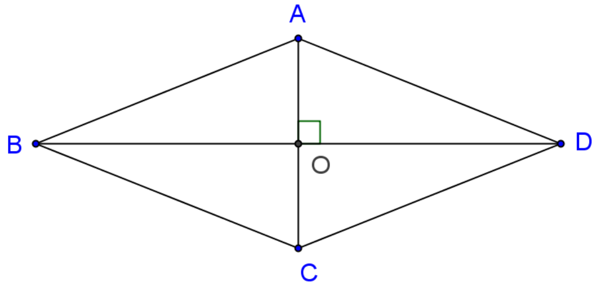


圖 9.1-30

想法：菱形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　菱形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 ＆ 菱形面積等於兩對角線乘積的一半
(2)　菱形 ABCD 面積 $=\dfrac{(10\text{公分})\times(4\text{公分})}{2}$ ＝20 平方公分	由(1) ＆ 已知$\overline{AC}$＝4 公分，$\overline{BD}$＝10 公分

例題 9.1-28：（菱形面積等於兩對角線乘積的一半）

如圖 9.1-31，已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若菱形 ABCD 面積＝5 平方公分，$\overline{AC}$＝2 公分，則$\overline{BD}$＝？

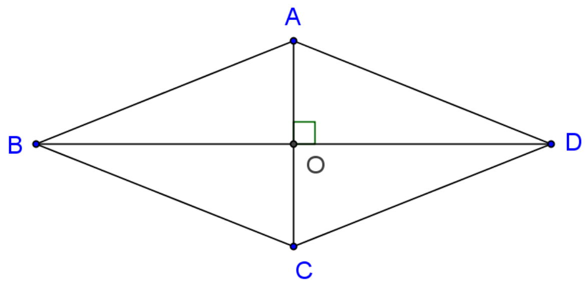


圖 9.1-31

想法：菱形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 菱形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 & 菱形面積等於兩對角線乘積的一半
(2) 5 平方公分＝$\dfrac{\overline{BD}\times(2公分)}{2}$	由(1) & 已知菱形 ABCD 面積＝5 平方公分，$\overline{AC}$＝2 公分
(3) $\overline{BD}$×(2 公分)＝(5 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BD}$＝(5 平方公分)×2÷(2 公分) ＝5 公分	由(3) 等量除法公理

例題 9.1-29：　（鳶形面積等於兩對角線乘積的一半）

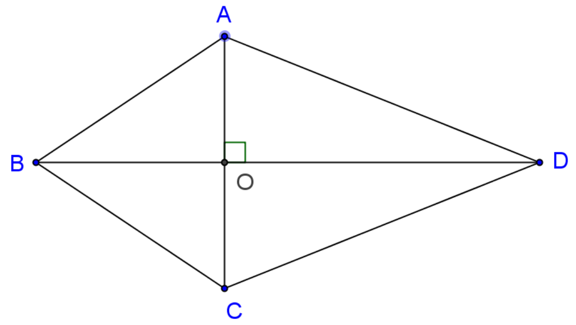


圖 9.1-32

已知：四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線

求證：鳶形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$

想法：(1) 鳶形對角線可將此鳶形分為兩個三角形

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$	已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 & 例題 6.2-25 鳶形兩對角線互相垂直
(2) $\triangle$ABD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OA}}{2}$	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 已證 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(3) $\triangle$BCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OC}}{2}$	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 已證 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(4) 鳶形 ABCD 面積 ＝$\triangle$ABD 面積＋$\triangle$BCD 面積 $=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OA}}{2}+\dfrac{\overline{BD}\times\overline{OC}}{2}$ $=\dfrac{\overline{BD}\times(\overline{OA}+\overline{OC})}{2}$ $=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	如圖 9.1-32 所示 全量等於分量之和 將(2) & (3) 代入 全量等於分量之和$\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$
(5) 所以鳶形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	由(4)

例題 9.1-30：　（鳶形面積等於兩對角線乘積的一半）

如圖 9.1-33，已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若$\overline{AC}$＝4 公分，$\overline{BD}$＝8 公分，則鳶形 ABCD 面積為何？

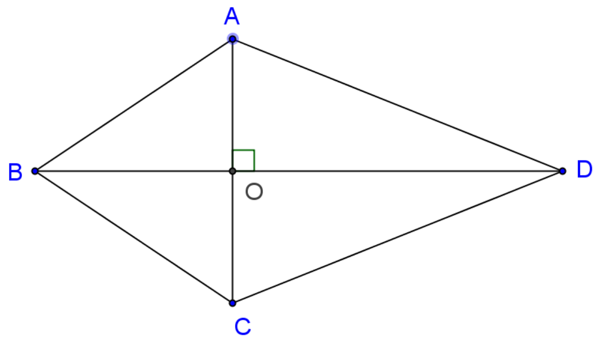


圖 9.1-33

想法：鳶形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　鳶形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 ＆ 鳶形面積等於兩對角線乘積的一半
(2)　鳶形 ABCD 面積 $=\dfrac{(8公分)\times(4公分)}{2}$ ＝16 平方公分	由(1) ＆ 已知$\overline{AC}$＝4 公分，$\overline{BD}$＝8 公分

例題 9.1-31：　（鳶形面積等於兩對角線乘積的一半）

如圖 9.1-34，已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若鳶形 ABCD 面積＝4 平方公分，$\overline{AC}$＝2 公分，則$\overline{BD}$＝？

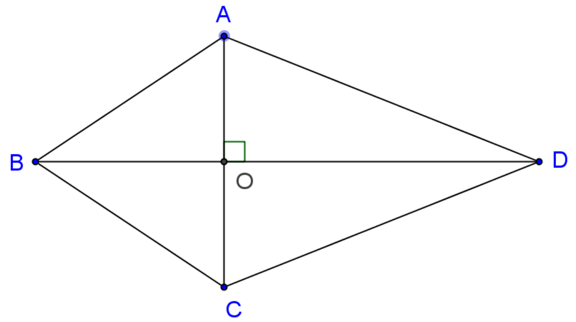


圖 9.1-34

想法：鳶形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　鳶形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 & 鳶形面積等於兩對角線乘積的一半
(2)　4 平方公分＝$\dfrac{\overline{BD}\times(2公分)}{2}$	由(1) & 已知鳶形 ABCD 面積＝4 平方公分，$\overline{AC}$＝2 公分
(3)　$\overline{BD}$×(2 公分)＝(4 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4)　$\overline{BD}$＝(4 平方公分)×2÷(2 公分) ＝4 公分	由(3) 等量除法公理

接下來，讓我們利用**平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形**，來解決以下例題 9.1-32~例題 9.1-36。

例題 9.1-32：　(平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形)

如圖 9.1-35，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上的高，又$\overline{CD}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝8 公分，$\overline{AF}$＝6 公分，求$\overline{AE}$。

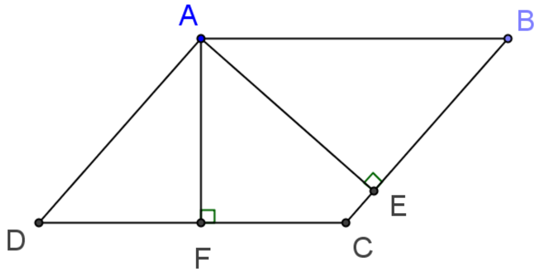


圖 9.1-35

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

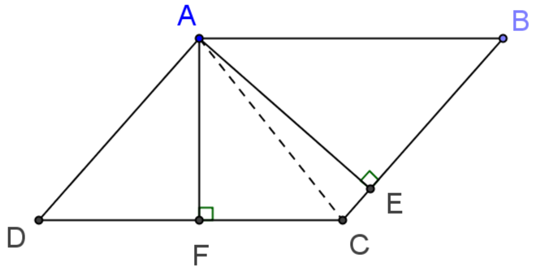


圖 9.1-35(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AC}$，則$\overline{AC}$為平行四邊形 ABCD 對角線，如圖 9.1-35(a)	過兩點可作一線段 ＆ 已知 ABCD 為平行四邊形
(2) 平行四邊形 ABCD 中，△ACD 面積＝△ACB 面積	由(1) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(3) $\dfrac{\overline{CD}\times\overline{AF}}{2}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AE}}{2}$	由(2) ＆ $\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上的高 ＆ 三角形面積為底與高乘積的一半
(4) $\dfrac{(10公分)\times(6公分)}{2}=\dfrac{(8公分)\times\overline{AE}}{2}$	由(3) ＆ 已知$\overline{CD}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝8 公分，$\overline{AF}$＝6 公分
(5) $\overline{AE}$＝(10 公分)×(6 公分)÷(8 公分)＝7.5 公分	由(4) 求$\overline{AE}$之值

例題 9.1-33： (平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形)

如圖 9.1-36，四邊形 ABCD 為長方形，四邊形 BCED 為平行四邊形，若△BCD 的面積為 5 平方單位，求四邊形 ABCE 的面積。

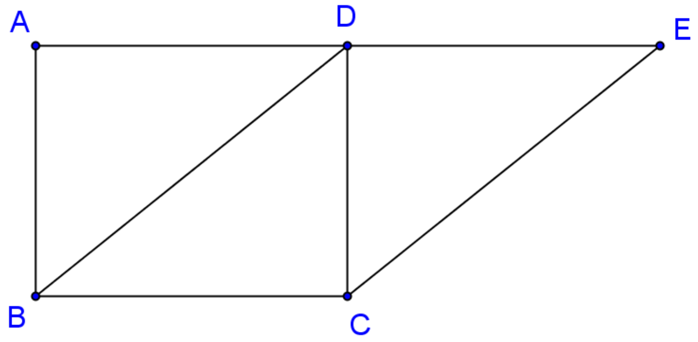


圖 9.1-36

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

解：

敘述	理由
(1) 長方形 ABCD 中 △ABD＝△BCD＝5 平方單位	已知四邊形 ABCD 為長方形 ＆ 長方形也是平行四邊形 ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 ＆ 已知△BCD 的面積為 5 平方單位
(2) 平行四邊形 BCED 中 △CDE＝△BCD＝5 平方單位	已知四邊形 BCED 為平行四邊形 ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 ＆ 已知△BCD 的面積為 5 平方單位
(3) 四邊形 ABCE 的面積 ＝△ABD＋△BCD＋△CDE ＝15 平方單位	如圖 9.1-36 所示，全量等於分量之和 由(1) ＆ (2) △ABD＝△BCD＝△CDE＝5 平方單位

例題 9.1-34：(平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形)

如圖 9.1-37，平行四邊形 ABCD 中，E、F 分別為$\overline{AD}$與$\overline{CD}$中點，求四邊形 AFCE 面積與四邊形 ABCD 面積的比值。

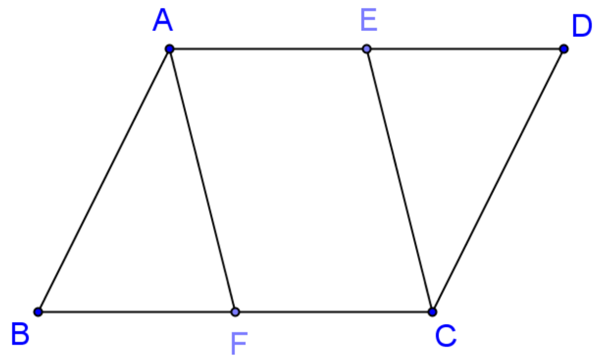


圖 9.1-37

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

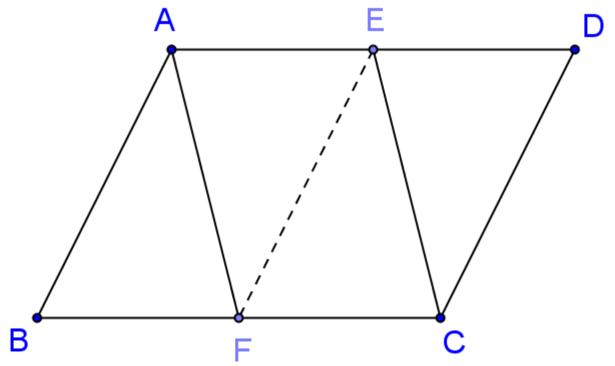


圖 9.1-37(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 E、F 兩點，如上圖 9.1-37(a)	作圖
(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形一組對邊平行且相等
(3) $\overline{AE}=\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ & $\overline{BF}=\overline{FC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	已知 E、F 分別為$\overline{AD}$與$\overline{CD}$中點
(4) $\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{BF}=\overline{FC}$	由(2) $\overline{AD}=\overline{BC}$ & (3) 遞移律
(5) ABFE 為平行四邊形	由(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & (4) $\overline{AE}=\overline{BF}$ & 一組對邊平行且相等為平行四邊形

(6) △ABF＝△AEF	由(5) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(7) EFCD 為平行四邊形	由(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ＆ (4) $\overline{ED}=\overline{FC}$ ＆ 一組對邊平行且相等為平行四邊形
(8) △DCE＝△EFC	由(7) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(9) AECF 為平行四邊形	由(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ＆ (4) $\overline{AE}=\overline{FC}$ ＆ 一組對邊平行且相等為平行四邊形
(10) △AEF＝△EFC	由(9) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(11) △ABF＝△AEF＝△DCE＝△EFC	由(6) 、 (8) ＆ (10) 遞移律
(12) 四邊形 AFCE 面積＝△AEF＋△EFC ＝△AEF＋△AEF ＝2△AEF	全量等於分量之和 由(10) △AEF＝△EFC 加法
(13) 四邊形 ABCD 面積 ＝△ABF＋△AEF＋△EFC＋△DCE ＝△AEF＋△AEF＋△AEF＋△AEF ＝4△AEF	全量等於分量之和 由(11) △ABF＝△AEF＝△DCE＝△EFC 加法
(14) $\dfrac{\text{四邊形AFCE面積}}{\text{四邊形ABCD面積}}=\dfrac{2\Delta AEF}{4\Delta AEF}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$	由(12) ＆ (13) 求比值

例題 9.1-35：(平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形)

如圖 9.1-38，P 為平行四邊形 ABCD 內部一點，$\overline{EF}$、$\overline{GH}$為經過 P 點分別與$\overline{AB}$、$\overline{AD}$平行的線段，若△PAD、△PCD、△PBC 的面積分別為 5 平方公分、6 平方公分、4 平方公分，求△PAB 的面積。

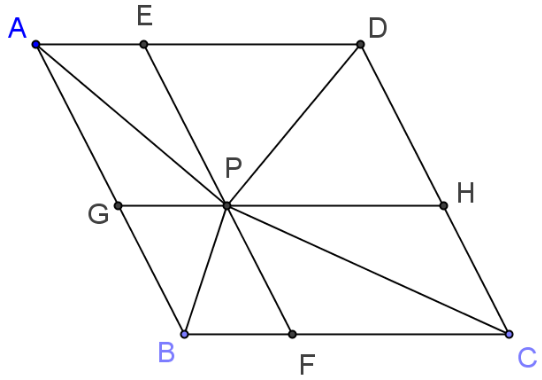


圖 9.1-38

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊平行
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{GH}$	由(1) & 已知$\overline{EF}$、$\overline{GH}$為經過 P 點分別與$\overline{AB}$、$\overline{AD}$平行的線段
(3) 四邊形 AGPE 為平行四邊形	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) △AEP＝△AGP	由(3) & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(5) 四邊形 BFPG 為平行四邊形	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(6) △BGP＝△BFP	由(5) & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(7) 四邊形 EPHD 為平行四邊形	由(2) $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(8) △DEP＝△DHP	由(7) & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(9) 四邊形 CHPF 為平行四邊形	由(2) $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形

(10) △CHP＝△CFP	由(9) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(11) △PAB＋△PCD	加法
＝(△AGP＋△BGP)＋(△DHP＋△CHP)	如圖 9.1-38，全量等於分量之和
＝(△AEP＋△BFP)＋(△DEP＋△CFP)	由(4) ＆ (6) ＆ (8) ＆ (10) 代換
＝(△AEP＋△DEP)＋(△BFP＋△CFP)	加法交換律 ＆ 結合律
＝△PAD＋△PBC	全量等於分量之和
(12) △PAB＋(6 平方公分) ＝(5 平方公分)＋(4 平方公分)	由 (11) ＆ 已知△PAD、△PCD、△PBC 的面積分別為 5 平方公分、6 平方公分、4 平方公分
(13) 所以△PAB＝(5＋4－6)平方公分 ＝3 平方公分	由(12) 等量減法公理

例題 9.1-36： (過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半)

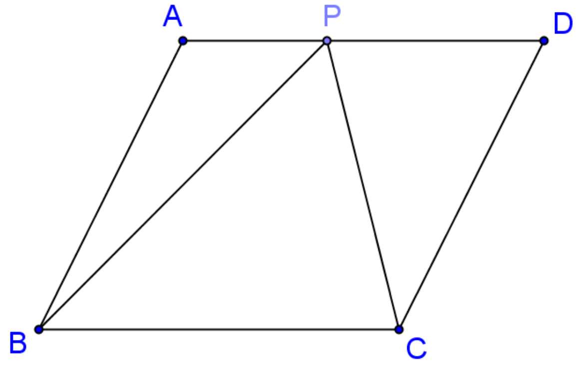


圖 9.1-39

已知：如圖 9.1-39，平行四邊形 ABCD 中，P 是$\overline{AD}$上的一點，若△ABP 面積為 a，△BCP 面積為 b，△CDP 面積為 c

求證： (1) a＋c＝b

(2) △BCP 面積＝$\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 面積

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

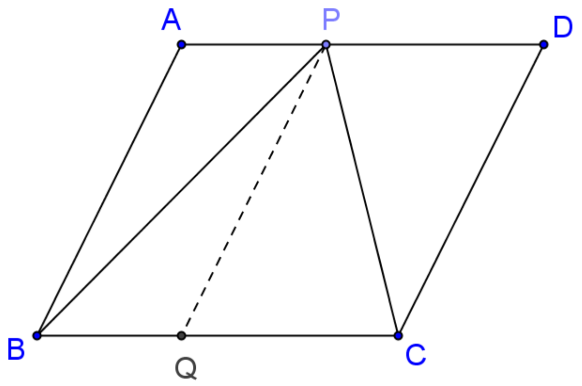


圖 9.1- 39(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 P 點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{BC}$於 Q 點，則$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$，如圖 9.1-39(a)所示	平行線作圖
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊平行
(3) 四邊形 ABQP 中，$\overline{AP} \parallel \overline{BQ}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$	如圖 9.1-39(a)所示 由(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & (1) $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

(4) 四邊形 ABQP 為平行四邊形	由(3) ＆ 兩組對邊平行為平行四邊形
(5) △QPB＝△ABP＝a	由(4) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 ＆ 已知△ABP 面積為 a
(6) 四邊形 PQCD 中， $\overline{PD} \parallel \overline{QC}$ 且 $\overline{CD} \parallel \overline{PQ}$	如圖 9.1-39(a)所示 由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ＆ (1) $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$
(7) 四邊形 PQCD 為平行四邊形	由(6) ＆ 兩組對邊平行為平行四邊形
(8) △PQC＝△CDP＝c	由(7) ＆ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 ＆ 已知△CDP 面積為 c
(9) △BCP＝△QPB＋△PQC	如圖 9.1-39(a)所示，全量等於分量之和
(10) b＝a＋c	由(9) ＆ 已知△BCP 面積為 b ＆ (5) △QPB＝a ＆ (8) △PQC＝c 已證
(11) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝a＋b＋c ＝(a＋c)＋b ＝b＋b＝2b ＝2×△BCP 面積	如圖 9.1-39(a)所示 全量等於分量之和 加法交換律 ＆ 結合律 由(10) b＝a＋c 已知△BCP 面積為 b
(12) △BCP 面積＝$\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 面積	由(11) 等量除法公理

由上述例題 9.1-36 中，我們可以得到一個結論：

過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半；也可以說平行四邊形的面積等於所形成三角形面積的 2 倍。

接著，讓我們將例題 9.1-36 所得到的結論應用在以下例題 9.1-37~例題 9.1-38 中。

例題 9.1-37： (過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半)

如圖 9.1-40，長方形 ABCD 中，$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝8 公分，E 點落在$\overline{CD}$上，求灰色區域的面積。

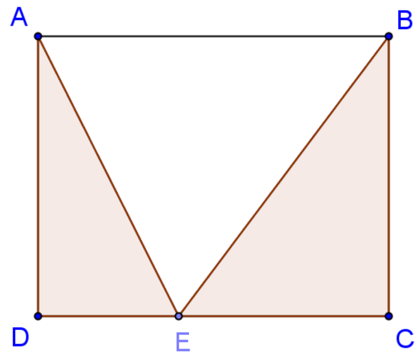


圖 9.1-40

想法：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝$\frac{1}{2}$長方形 ABCD 面積	已知 ABCD 為長方形，E 點落在$\overline{CD}$上 & 過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半
(2) 長方形 ABCD 面積 ＝$\overline{AB}\times\overline{BC}$ ＝(10 公分)×(8 公分)＝80 平方公分	長方形面積為長與寬之乘積 & 已知$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝8 公分
(3) △ABE 面積＝$\frac{1}{2}$×(80 平方公分) ＝40 平方公分	將(2)式代入 (1)式得
(4) 灰色區域的面積 ＝長方形 ABCD 面積－△ABE 面積 ＝(80 平方公分)－(40 平方公分) ＝40 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 長方形 ABCD 面積＝80 平方公分 (3) △ABE 面積＝40 平方公分　已證

例題 9.1-38： (過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半)

如圖 9.1-41，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$＝8 公分，$\overline{DE}$＝6 公分，∠AED＝90°，求四邊形 ABCD 的面積。

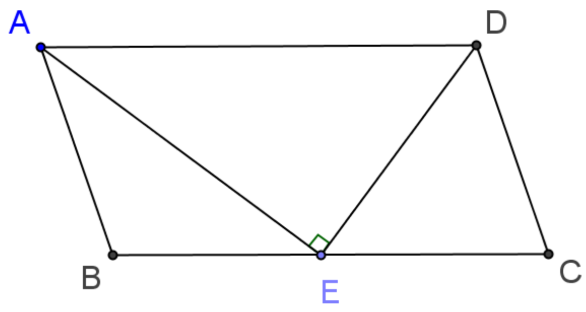


圖 9.1-41

想法：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ADE 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 ABCD 面積	已知 ABCD 為平行四邊形 & 過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半
(2) △ADE 為直角三角形 △ADE 面積＝$\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{DE}$ ＝$\frac{1}{2}\times$(8 公分)×(6 公分) ＝24 平方公分	已知∠AED＝90° & 三角形面積等於底與高乘積的一半 & 已知$\overline{AE}$＝8 公分，$\overline{DE}$＝6 公分
(3) 24 平方公分＝$\frac{1}{2}$四邊形 ABCD 面積	將(2)式代入(1)式得
(4) 四邊形 ABCD 面積＝2×(24 平方公分) ＝48 平方公分	由(3) 等量乘法公理

接下來，讓我們利用平行線間距離不變的性質，來看看兩平行線間圖形的面積關係。

例題 9.1-39：（同底等高的平行四邊形面積皆相等）

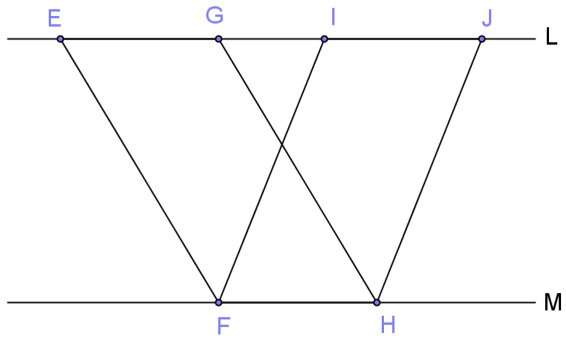


圖 9.1-42

已知：如圖 9.1-42，L $\parallel$ M，四邊形 EFHG 與 IFHJ 皆為平行四邊形
求證：四邊形 IFHJ 面積＝四邊形 EFHG 面積

想法：兩平行線間距離不變

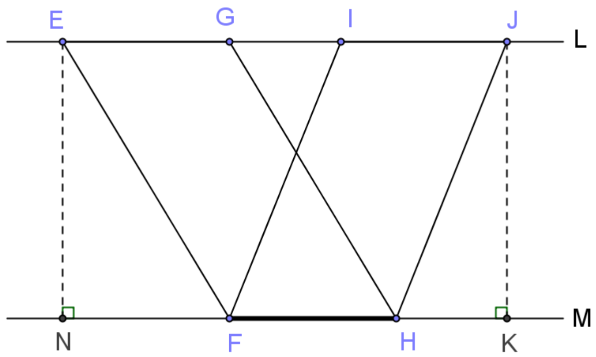


圖 9.1-42(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{EN}\perp$M、$\overline{JK}\perp$M，如圖 9.1-42(a)所示，則$\overline{EN}=\overline{JK}$	作圖 已知 L $\parallel$ M ＆ 平行線間距離不變
(2) 四邊形 EFHG 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{EN}$為高，四邊形 EFHG 面積＝$\overline{FH}\times\overline{EN}$	已知四邊形 EFHG 為平行四邊形 ＆ (1) 作$\overline{EN}\perp$M ＆ 平行四邊形面積定理
(3) 四邊形 IFHJ 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{JK}$為高，四邊形 IFHJ 面積＝$\overline{FH}\times\overline{JK}=\overline{FH}\times\overline{EN}$	已知四邊形 IFHJ 為平行四邊形 ＆ (1) 作$\overline{JK}\perp$M ＆ 平行四邊形面積定理 ＆ (1) $\overline{EN}=\overline{JK}$
(4) 四邊形 IFHJ 面積＝四邊形 EFHG 面積	由(2) ＆ (3) 遞移律

例題 9.1-40：（同底等高的平行四邊形面積皆相等）

如圖 9.1-43，已知 L ∥ M，四邊形 EFHG 與 IFHJ 皆為平行四邊形，若四邊形 EFHG 面積為 10 平方公分，則四邊形 IFHJ 面積為何？

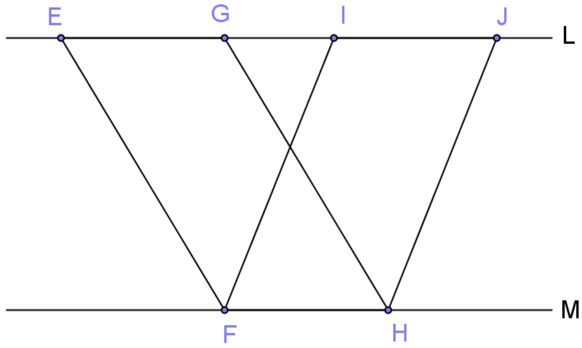


圖 9.1-43

想法：同底等高的平行四邊形面積皆相等

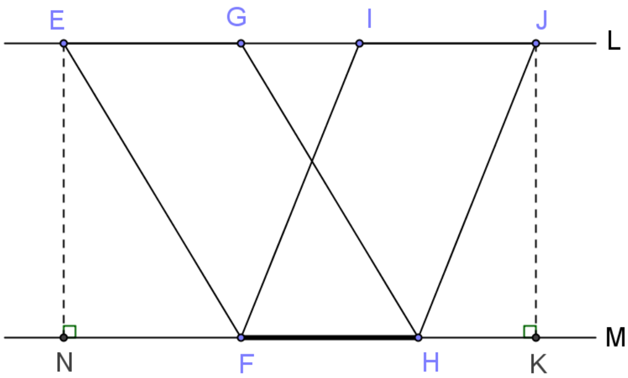


圖 9.1-43(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{EN}\perp$M、$\overline{JK}\perp$M， 如圖 9.1-43(a)所示，則$\overline{EN}=\overline{JK}$	作圖 已知 L ∥ M & 平行線間距離不變
(2) 四邊形 EFHG 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{EN}$為高	已知四邊形 EFHG 為平行四邊形 & 由(1) 作$\overline{EN}\perp$M
(3) 四邊形 IFHJ 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{JK}$為高	已知四邊形 IFHJ 為平行四邊形 & 由(1) 作$\overline{JK}\perp$M
(4) 四邊形 EFHG 與 IFHJ 同底等高	由(1) & (2) & (3) $\overline{FH}$為底、$\overline{EN}=\overline{JK}$為高
(5) 四邊形 IFHJ 面積＝四邊形 EFHG 面積 ＝10 平方公分	由(4) & 同底等高的平行四邊形面積皆相等 & 已知四邊形 EFHG 面積為 10 平方公分

例題 9.1-41：　　**（同底等高之三角形面積皆相等）**

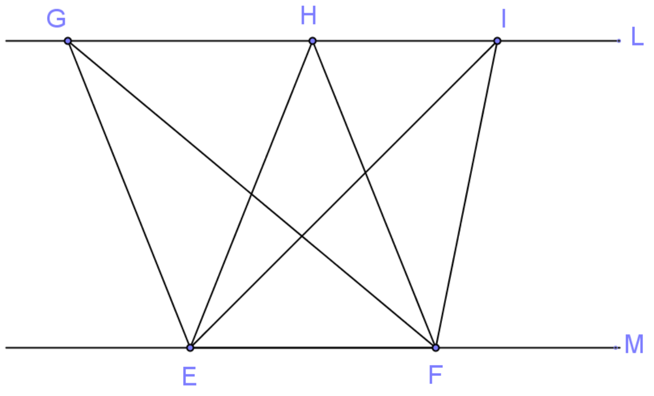


圖 9.1-44

已知：如圖 9.1-44，L ∥ M

求證：△EFG 面積＝△EFI 面積＝△EFH 面積

想法：兩平行線間距離不變

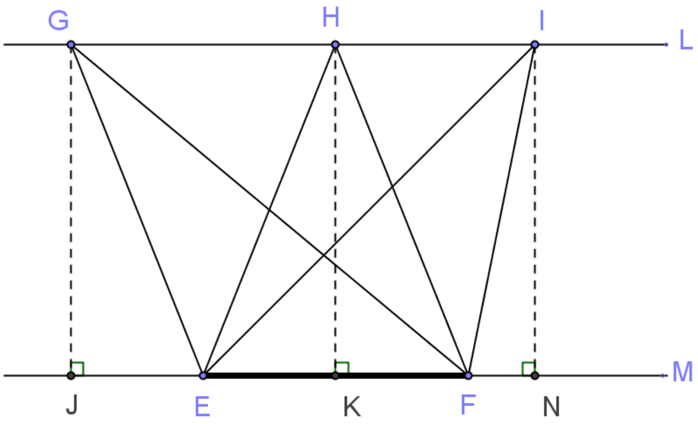


圖 9.1-44(a)

解：

敘述	理由
(1)　作$\overline{GJ}\perp$M、$\overline{HK}\perp$M、$\overline{IN}\perp$M， 如圖 9.1-44(a)所示，則$\overline{GJ}=\overline{HK}=\overline{IN}$	作圖 已知 L ∥ M ＆ 平行線間距離不變
(2)　△EFH 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{HK}$為高， △EFH 面積＝($\overline{EF}\times\overline{HK}$)÷2	由(1) 作$\overline{HK}\perp$M ＆ 三角形面積為底與高乘積的一半
(3)　△EFG 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{GJ}$為高， △EFG 面積＝($\overline{EF}\times\overline{GJ}$)÷2	由(1) 作$\overline{GJ}\perp$M ＆ 三角形面積為底與高乘積的一半
(4)　△EFI 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{IN}$為高， △EFI 面積＝($\overline{EF}\times\overline{IN}$)÷2	由(1) 作$\overline{IN}\perp$M ＆ 三角形面積為底與高乘積的一半
(5)　△EFG 面積＝△EFI 面積＝△EFH 面積	由(1) ＆ (2) ＆ (3) ＆ (4) 遞移律

例題 9.1-42：　（同底等高之三角形面積皆相等）

如圖 9.1-45，已知 L || M，若△EFH 面積為 10 平方公分，則：

(1)　△EFG 面積為何？　　　　(2)　△EFI 面積為何？

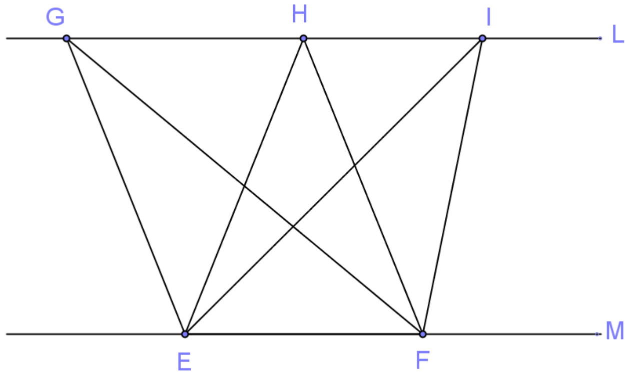


圖 9.1-45

想法：同底等高之三角形面積皆相等

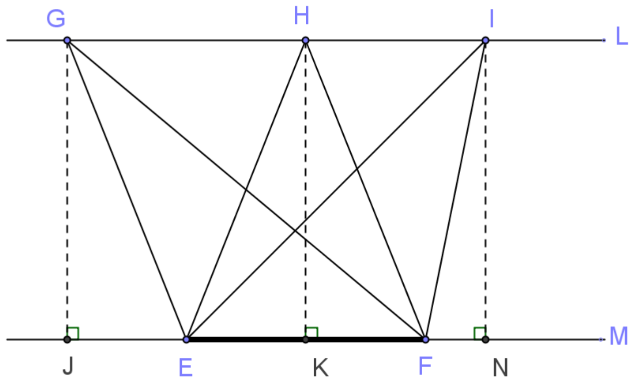


圖 9.1-45(a)

解：

敘述	理由
(1)　作$\overline{GJ}\perp$M、$\overline{HK}\perp$M、$\overline{IN}\perp$M， 如圖 9.1-45(a)所示，則$\overline{GJ}=\overline{HK}=\overline{IN}$	作圖 已知 L || M ＆ 平行線間距離不變
(2)　△EFH 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{HK}$為高	由(1) 作$\overline{HK}\perp$M
(3)　△EFG 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{GJ}$為高	由(1) 作$\overline{GJ}\perp$M
(4)　△EFI 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{IN}$為高	由(1) 作$\overline{IN}\perp$M
(5)　△EFG、△EFI、△EFH 同底等高	由(1) ＆ (2) ＆ (3) ＆ (4) $\overline{EF}$為底、$\overline{GJ}=\overline{HK}=\overline{IN}$為高
(6)　△EFG 面積＝△EFI 面積＝△EFH 面積	由(5) ＆ 同底等高之三角形面積皆相等
(7)　△EFG 面積＝△EFI 面積＝10 平方公分	由(6) ＆ 已知△EFH 面積為 10 平方公分

接下來，讓我們看看等高三角形面積的關係。

例題 9.1-43：　（等高之三角形面積比為底邊長之比）

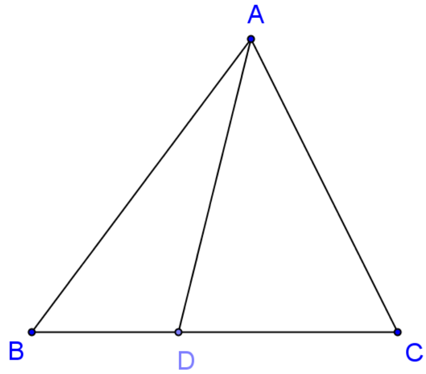


圖 9.1-46

已知：如圖 9.1-46 所示，$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝m：n
求證：△ABD 面積：△ACD 面積＝m：n

想法：三角形面積為底與高乘積的一半

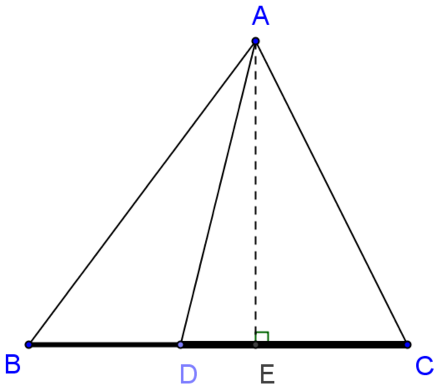


圖 9.1-46(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，如圖 9.1-46(a)所示	作圖
(2) △ABD 中，$\overline{BD}$為底、$\overline{AE}$為高， △ABD 面積＝($\overline{BD}\times\overline{AE}$)÷2	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(3) △ACD 中，$\overline{CD}$為底、$\overline{AE}$為高， △ACD 面積＝($\overline{CD}\times\overline{AE}$)÷2	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(4) △ABD 面積：△ACD 面積 ＝($\overline{BD}\times\overline{AE}$)÷2：($\overline{CD}\times\overline{AE}$)÷2 ＝$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝m：n	求(3)式 & (2)式之比 & 已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝m：n

例題 9.1-44： **（等高之三角形面積比為底邊長之比）**

如圖 9.1-47，已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝2：3，若△ABD 面積為 20 平方公分，則△ACD 面積為何？

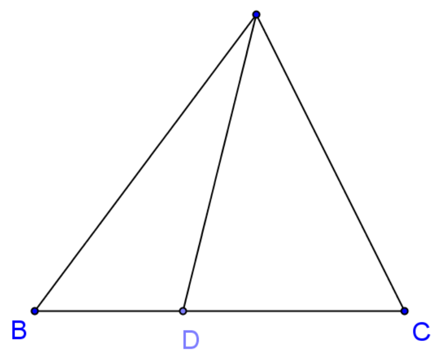


圖 9.1-47

想法：等高三角形的面積比等於底邊長之比

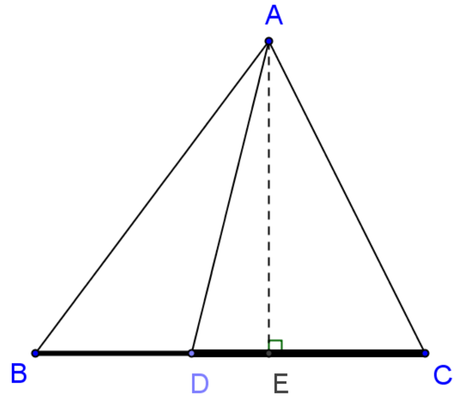


圖 9.1-47(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，如圖 9.1-47(a)所示	作圖
(2) △ABD 中，$\overline{BD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(3) △ACD 中，$\overline{CD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(4) △ABD 與△ACD 等高	由(2) & (3) $\overline{AE}$為高
(5) △ABD 面積：△ACD 面積＝$\overline{BD}$：$\overline{CD}$	由(2) & (3) & (4) & 等高三角形的面積比等於底邊長之比
(6) (20 平方公分)：△ACD 面積＝2：3	由(5) & 已知△ABD 面積為 20 平方公分 & 已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝2：3
(7) 所以△ACD 面積＝30 平方公分	由(6) 求△ACD 面積之值

例題 9.1-45： （等高之三角形面積比為底邊長之比）

如圖 9.1-48，已知 L ∥ M，$\overline{EF}$：$\overline{HI}$＝1：2，若△EFG 面積為 10 平方公分，則△HIJ 的面積為何？

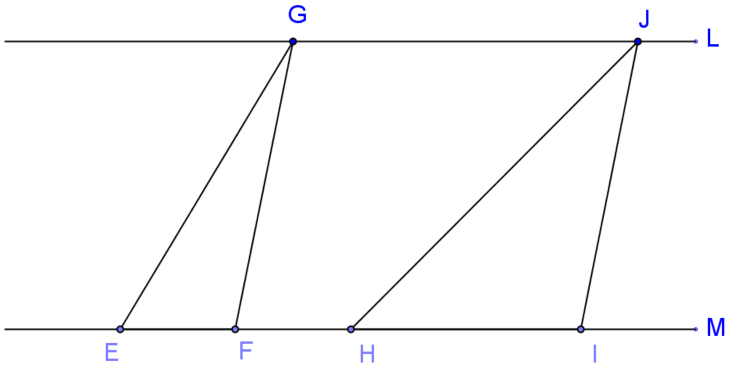


圖 9.1-48

想法： 等高之三角形面積比為底邊長之比

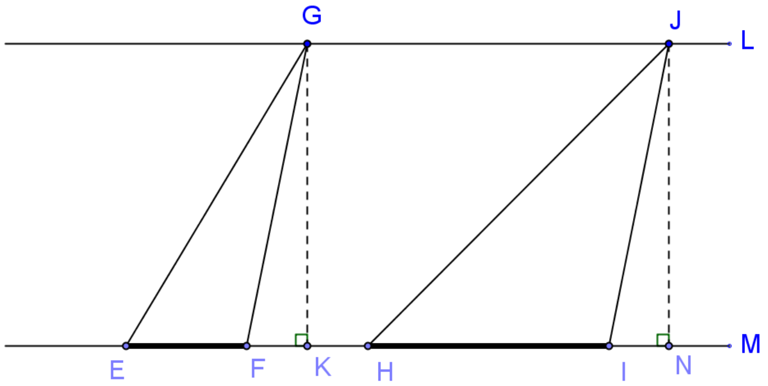


圖 9.1-48(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{GK}$⊥M、$\overline{JN}$⊥M，如圖 9.1-48(a)所示，則$\overline{GK}$＝$\overline{JN}$	作圖 已知 L ∥ M ＆ 平行線間距離不變
(2) △EFG 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{GK}$為高	由(1) 作$\overline{GK}$⊥M
(3) △HIJ 中，$\overline{HI}$為底、$\overline{JN}$為高	由(1) 作$\overline{JN}$⊥M
(4) △EFG 與△HIJ 等高	由(1) ＆ (2) ＆ (3) $\overline{GK}$＝$\overline{JN}$為高
(5) △EFG 面積：△HIJ 面積＝$\overline{EF}$：$\overline{HI}$	由(2) ＆ (3) ＆ (4) ＆ 等高之三角形面積比為底邊長之比
(6) (10 平方公分)：△HIJ 面積＝1：2	由(5) ＆ 已知△EFG 面積為 10 平方公分 ＆ 已知$\overline{EF}$：$\overline{HI}$＝1：2
(7) △HIJ 面積＝20 平方公分	由(6) 求△HIJ 面積之值

接下來，讓我們利用例題 9.1-43 所證明的結論：**等高之三角形面積比為底邊長之比**。再搭配第四章所提到的三角形的重心性質，來證明例題 9.1-46。

例題 9.1-46：

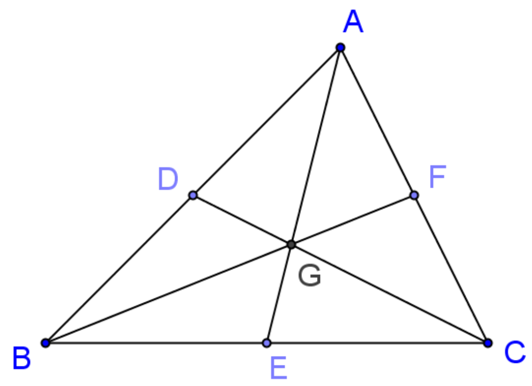


圖 9.1-49

已知：如圖 9.1-49，G 點為△ABC 的重心

求證：(1) $\triangle AGD=\triangle BGD=\triangle BGE=\triangle CGE=\triangle CGF=\triangle AGF=\frac{1}{6}\triangle ABC$

(2) $\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$

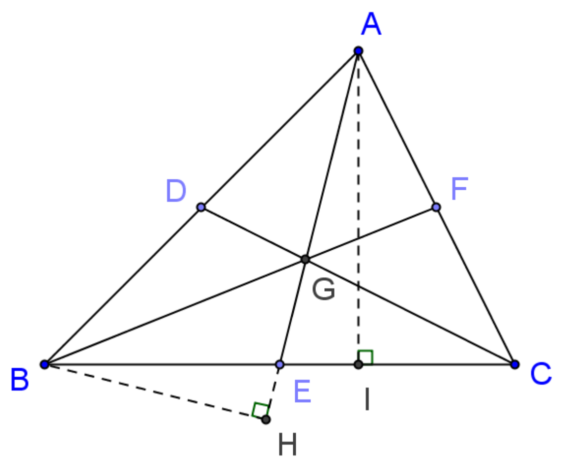


圖 9.1-49(a)

想法：(1) 三角形重心為三中線的交點

(2) 三角形頂點到重心的距離為中線長度的 $\frac{2}{3}$

(3) 等高之三角形面積比為底邊長之比

證明：

敘述	理由
(1) 過 B 點作$\overline{BH}\perp\overrightarrow{AE}$， 過 A 點作$\overline{AI}\perp\overline{BC}$，如圖 9.1-49(a)	直線外一點垂直線作圖
(2) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AE}$	已知 G 點為△ABC 的重心 ＆三角形頂點到重心的距離為中線長度的$\frac{2}{3}$
(3) $\overline{AE}=\overline{AG}+\overline{GE}$	全量等於分量之和
(4) $\overline{GE}=\overline{AE}-\overline{AG}=\overline{AE}-\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AE}$	由(3) 等量減法公理 ＆ (2) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AE}$
(5) △BGE 中，$\overline{GE}$為底，$\overline{BH}$為高	如圖 9.1-49(a) ＆ (1) 作$\overline{BH}\perp\overrightarrow{AE}$
(6) △ABE 中，$\overline{AE}$為底，$\overline{BH}$為高	如圖 9.1-49(a) ＆ (1) 作$\overline{BH}\perp\overrightarrow{AE}$
(7) △BGE 與△ABE 等高	由(5) ＆ (6) $\overline{BH}$為高
(8) △BGE 面積：△ABE 面積＝$\overline{GE}$：$\overline{AE}$	由(5) ＆ (6) ＆ (7) ＆ 等高之三角形面積比為底邊長之比
(9) △BGE 面積：△ABE 面積 $=\frac{1}{3}\overline{AE}:\overline{AE}=\frac{1}{3}:1$	將(4) $\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{AE}$ 代入 (8) ＆ 倍比定理
(10) △BGE 面積＝$\frac{1}{3}$△ABE 面積	由(9) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(11) $\overline{AE}$為△ABC 中線，E 點為$\overline{BC}$中點， $\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	已知 G 點為△ABC 的重心 ＆ 三角形重心為三中線的交點
(12) △ABC 中，$\overline{BC}$為底，$\overline{AI}$為高	如圖 9.1-49(a) ＆ (1) 作$\overline{AI}\perp\overline{BC}$
(13) △ABE 中，$\overline{BE}$為底，$\overline{AI}$為高	如圖 9.1-49(a) ＆ (1) 作$\overline{AI}\perp\overline{BC}$
(14) △ABC 與△ABE 等高	由(12) ＆ (13) $\overline{AI}$為高
(15) △ABC 面積：△ABE 面積＝$\overline{BC}$：$\overline{BE}$	由(12) ＆ (13) ＆ (14) ＆ 等高之三角形面積比為底邊長之比
(16) △ABC 面積：△ABE 面積 $=\overline{BC}:\frac{1}{2}\overline{BC}=1:\frac{1}{2}$	將(11) $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ 代入 (15) ＆ 倍比定理
(17) △ABE 面積＝$\frac{1}{2}$△ABC 面積	由(16) ＆ 內項乘積等於外項乘積

(18) $\triangle BGE$ 面積 $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{6}\triangle ABC$ 面積	將(17)式代入(10)式得
(19) 同理可證： $\triangle AGD=\frac{1}{6}\triangle ABC$、 $\triangle BGD=\frac{1}{6}\triangle ABC$、 $\triangle CGE=\frac{1}{6}\triangle ABC$、 $\triangle CGF=\frac{1}{6}\triangle ABC$、 $\triangle AGF=\frac{1}{6}\triangle ABC$	重複(1)~(18)　同理可證
(20) $\triangle AGD=\triangle BGD=\triangle BGE=\triangle CGE=\triangle CGF=\triangle AGF=\frac{1}{6}\triangle ABC$	由(18) & (19)
(21) $\triangle AGB=\triangle AGD+\triangle BGD=\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC=\frac{1}{3}\triangle ABC$	如圖 9.1-49(a)所示，全量等於分量之和 將(20) $\triangle AGD=\triangle BGD=\frac{1}{6}\triangle ABC$ 代入加法
(22) 同理可證： $\triangle BGC=\frac{1}{3}\triangle ABC$ $\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$	重複(21)　同理可證
(23) $\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$	由(21) & (22)

由例題 9.1-46，我們得到以下結論：

(1) 三角形三中線將此三角形面積平分成 6 個面積相等的小三角形。

(2) 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形。

接下來，我們將上述的結論應用在以下例題 9.1-47~例題 9.1-50 中。

例題 9.1-47：

如圖 9.1-50，$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為△ABC 的三中線，G 點為△ABC 的重心，已知△ABC 面積為 36 平方公分，求：

(1) △AGD 面積為何？

(2) △BGC 面積為何？

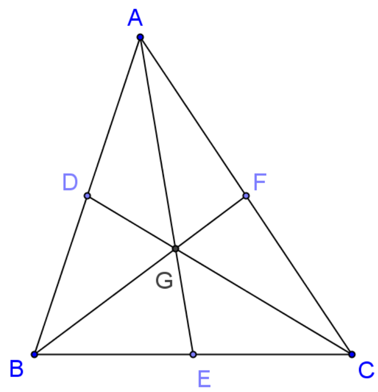


圖 9.1-50

想法：(1) 三角形三中線將此三角形面積平分成 6 個面積相等的小三角形

(2) 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

解：

敘述	理由
(1) $\triangle AGD=\frac{1}{6}\triangle ABC$ $=\frac{1}{6}\times(36$ 平方公分$)$ $=6$ 平方公分	已知$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為△ABC 的三中線 & 三角形三中線將此三角形面積平分成 6 個面積相等的小三角形 & 已知△ABC 面積為 36 平方公分
(2) $\triangle BGC=\frac{1}{3}\triangle ABC$ $=\frac{1}{3}\times(36$ 平方公分$)$ $=12$ 平方公分	已知 G 點為△ABC 的重心 & 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形 & 已知△ABC 面積為 36 平方公分

例題 9.1-48：

如圖 9.1-51 所示，△ABC 中，$\overline{CD}$、$\overline{BE}$為兩中線，已知$\overline{CD}\perp\overline{BE}$，且$\overline{CD}$、$\overline{BE}$相交於 G 點，若$\overline{CD}$＝9 公分，$\overline{BE}$＝15 公分，則△ABC 的面積為何？

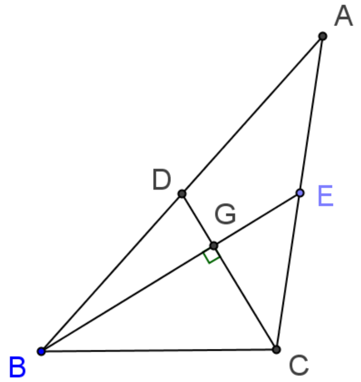


圖 9.1-51

想法：(1) 三角形三中線的交點為此三角形的重心

(2) 利用三角形頂點到重心的距離為中線長度的$\frac{2}{3}$，求出△BCG 的底與高，並算出△BCG 的面積

(3) 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

解：

敘述	理由
(1) G 點為△ABC 重心	已知△ABC 中，$\overline{CD}$、$\overline{BE}$為兩中線，且$\overline{CD}$、$\overline{BE}$相交於 G 點 & 三角形重心為三中線的交點
(2) $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{2}{3}\times(9\text{ 公分})$ ＝6 公分	由(1) & 三角形頂點到重心的距離為中線長度的$\frac{2}{3}$ & 已知$\overline{CD}$＝9 公分
(3) $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}=\frac{2}{3}\times(15\text{ 公分})$ ＝10 公分	由(1) & 三角形頂點到重心的距離為中線長度的$\frac{2}{3}$ & 已知$\overline{BE}$＝15 公分
(4) △BCG 中，$\overline{BG}$為底、$\overline{CG}$為高	已知$\overline{CD}\perp\overline{BE}$，且$\overline{CD}$、$\overline{BE}$相交於 G 點
(5) △BCG 面積 $=\frac{\overline{BG}\times\overline{CG}}{2}$ $=\frac{(10\text{公分})\times(6\text{公分})}{2}$ ＝30 平方公分	三角形面積等於底與高乘積的一半 & 由(4) △BCG 中，$\overline{BG}$為底、$\overline{CG}$為高 & 由(2) $\overline{CG}$＝6 公分、(3) $\overline{BG}$＝10 公分

(6) △BCG 面積 $= \frac{1}{3}$ △ABC 面積	由(1) & 三角形重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成3個面積相等的小三角形
(7) 30 平方公分 $= \frac{1}{3}$ △ABC 面積	由(6) & (5) △BCG 面積＝30 平方公分
(8) △ABC 面積 ＝3×(30 平方公分) ＝90 平方公分	由(7) 等量乘法公理

例題 9.1-49：

如圖 9.1-52，已知 G 為△ABC 的重心，若∠ABC＝90°，且$\overline{AC}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝6 公分，試求△ABG 的面積。

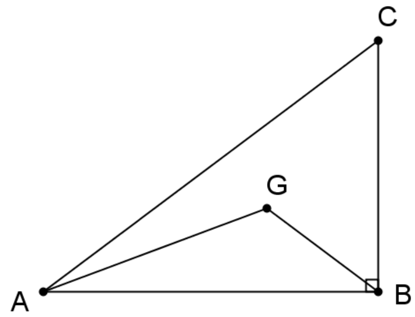


圖 9.1-52

想法：(1) 利用畢氏定理求出$\overline{AB}$的長度，並求出△ABC 的面積

(2) 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

解：

敘述	理由
(1) 直角△ABC 中 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	畢氏定理 ＆ 已知△ABC 中，∠ABC＝90°
(2) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$ ＝(10 公分)^2－(6 公分)^2 ＝64 平方公分	由(1) 等量減法公理 ＆ 已知$\overline{AC}$＝10 公分，$\overline{BC}$＝6 公分
(3) $\overline{AB}$＝8 公分 或 $\overline{AB}$＝－8 公分	由(2) 求平方根
(4) $\overline{AB}$＝8 公分	由(3) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(5) △ABC 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{BC}$為高	已知△ABC 中，∠ABC＝90°
(6) △ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(8\text{公分})\times(6\text{公分})}{2}$ ＝24 平方公分	三角形面積等於底與高乘積的一半 ＆ (5) △ABC 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{BC}$為高 ＆ (4) $\overline{AB}$＝8 公分 已證 ＆ 已知$\overline{BC}$＝6 公分
(7) △ABG 面積＝$\dfrac{1}{3}$△ABC 面積 $=\dfrac{1}{3}\times$(24 平方公分) ＝8 平方公分	已知 G 為△ABC 的重心 ＆ 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形 ＆ (6) △ABC 面積＝24 平方公分

例題 9.1-50：

如圖 9.1-53，四邊形 ABCD 為平行四邊形，E 點為$\overline{AB}$中點，$\overline{BD}$與$\overline{CE}$相交於 F 點，若△BFC 面積為 4 平方公分，則平行四邊形 ABCD 面積為何？

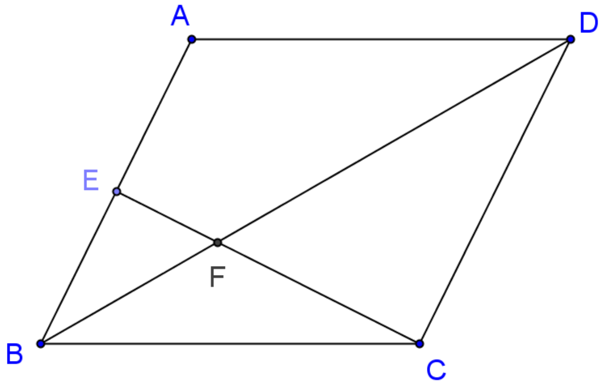


圖 9.1-53

想法：(1) 若 F 點為△ABC 重心，利用三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形，則可得到△ABC 的面積

(2) 利用平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形，即可得平行四邊形 ABCD 面積

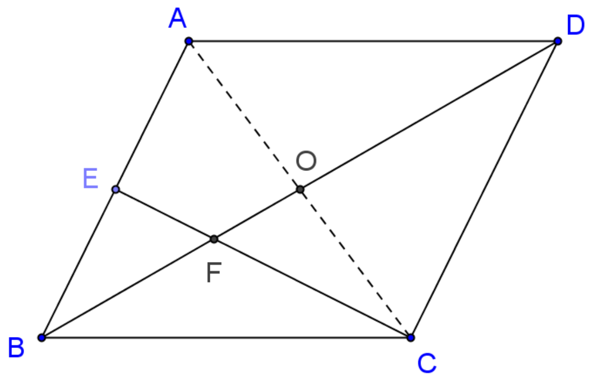


圖 9.1-53(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AC}$交$\overline{BD}$於 O 點，如圖 9.1-53(a)所示	作圖
(2) O 點$\overline{AC}$為中點，$\overline{OA}=\overline{OC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對角線互相平分
(3) △ABC 中，$\overline{CE}$為中線，$\overline{OB}$為中線	已知 E 點為$\overline{AB}$中點 & (2) O 點$\overline{AC}$為中點
(4) F 點為△ABC 重心	由(3) & 三角形重心為三中線的交點
(5) $\triangle BFC=\frac{1}{3}\triangle ABC$	由(4) & 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

(6) △ABC＝$\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 面積	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(7) △BFC ＝$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 面積 ＝$\frac{1}{6}$平行四邊形 ABCD 面積	將(6)式代入(5)式得
(8) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝6×△BFC 面積 ＝6×(4 平方公分) ＝24 平方公分	由(7) 等量乘法公理 & 已知△BFC 面積為 4 平方公分

接下來，讓我們利用例題 9.1-43 所證明的結論：**等高之三角形面積比為底邊長之比**。再搭配第四章所提到的三角形的內心性質，來證明例題 9.1-51，並利用例題 9.1-51 的結論來解例題 9.1-52。

例題 9.1-51：

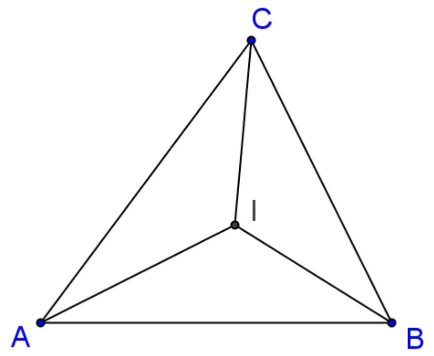


圖 9.1-54

已知：如圖 9.1-54，I 點為△ABC 內心

求證：△AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$

想法：(1) 三角形內心到三角形三邊等距離

(2) 等高之三角形面積比為底邊長之比

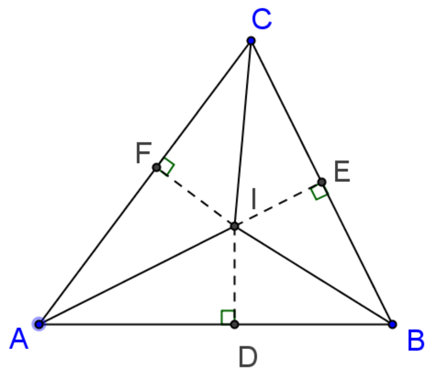


圖 9.1-54(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 I 點作△ABC 三邊的垂直線，分別交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$於 D、E、F 三點，如圖 9.1-54(a)所示，則$\overline{ID}\perp\overline{AB}$、$\overline{IE}\perp\overline{BC}$、$\overline{IF}\perp\overline{CA}$；且$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$	作圖 & 已知 I 點為△ABC 內心 & 三角形內心到三角形三邊等距離
(2) △AIB 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{ID}$為高	由(1) $\overline{ID}\perp\overline{AB}$
(3) △BIC 中，$\overline{BC}$為底、$\overline{IE}$為高	由(1) $\overline{IE}\perp\overline{BC}$
(4) △CIA 中，$\overline{CA}$為底、$\overline{IF}$為高	由(1) $\overline{IF}\perp\overline{CA}$

(5) △AIB、△BIC、△CIA 等高	由(2) $\overline{ID}$為高、(3) $\overline{IE}$為高、(4) $\overline{IF}$為高 & (1) $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$
(6) △AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積 $=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$	由(2)~(5) & 等高之三角形面積比為底邊長之比

結論：由例題 9.1-51，我們可以得到以下結果：若 I 點為△ABC 內心，
則△AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積$=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。

例題 9.1-52：

如圖 9.1-55，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BAC＝60°，∠ACB＝30°，且△AIB 面積為$\sqrt{3}$平方公分，試求△BIC 的面積。

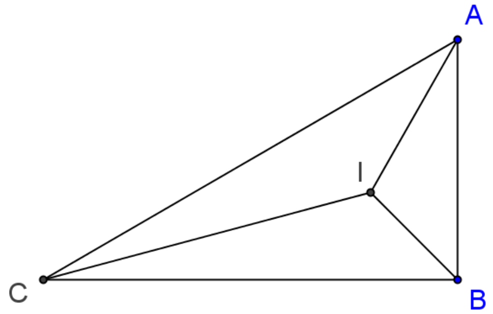


圖 9.1-55

想法：(1) 利用例題 9.1-51 結論：若 I 點為△ABC 內心，則 △AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$

(2) 30°-90°-60°的直角三角形，其三邊長之比為 1：2：$\sqrt{3}$

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， ∠BAC＋∠ACB＋∠ABC＝180°	如圖 9.1-55 所示 三角形三內角和為 180°
(2) ∠ABC＝180°－∠BAC－∠ACB ＝180°－60°－30°＝90°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠BAC＝60°，∠ACB＝30°
(3) △ABC 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(2) ∠ABC＝90° & 已知∠BAC＝60°，∠ACB＝30°
(4) $\overline{AB}$：$\overline{CA}$：$\overline{BC}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(3) & 30°-90°-60°的直角三角形， 其三邊長之比為 1：2：$\sqrt{3}$
(5) △AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積 ＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用例題 9.1-51 結論：若 I 點為△ABC 內心，則 △AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積 ＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$
(6) △AIB 面積：△BIC 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$	由(5)
(7) ($\sqrt{3}$平方公分)：△BIC 面積＝1：$\sqrt{3}$	由(6) & (4) $\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝1：$\sqrt{3}$ & 已知△AIB 面積為$\sqrt{3}$平方公分
(8) △BIC 面積＝$\sqrt{3}$×($\sqrt{3}$平方公分) ＝3 平方公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積

接下來，讓我們利用例題 9.1-43 所證明的結論：

等高之三角形面積比為底邊長之比。

來證明例題 9.1-53，並將例題 9.1-53 所得到的結果應用到例題 9.1-54。

例題 9.1-53：(四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積)

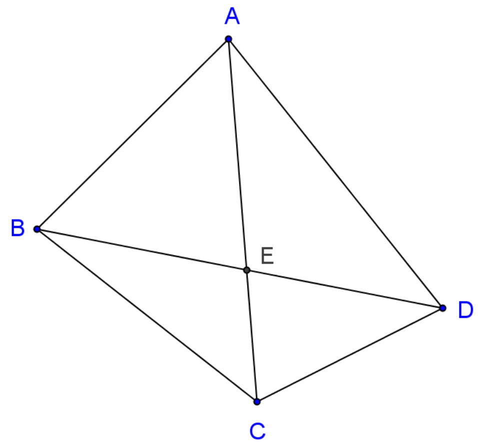


圖 9.1-56

已知：如圖 9.1-56，四邊形 ABCD 中，E 點為兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點

求證：△ADE 面積×△BCE 面積＝△ABE 面積×△CDE 面積

想法：(1) 若能求得△ABE 面積：△ADE 面積＝△BCE 面積：△CDE 面積，
則能得到△ADE 面積×△BCE 面積＝△ABE 面積×△CDE 面積

(2) 等高之三角形面積比為底邊長之比

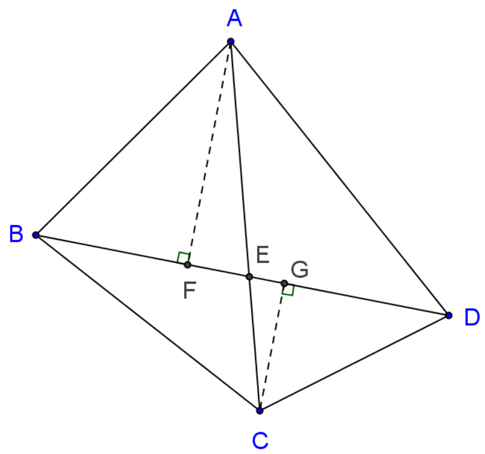


圖 9.1-56(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$、$\overline{CG}\perp\overline{BD}$， 如圖 9.1-56(a)	作圖

(2) △ABE 中，$\overline{BE}$為底、$\overline{AF}$為高	由(1) 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$
(3) △ADE 中，$\overline{DE}$為底、$\overline{AF}$為高	由(1) 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$
(4) △ABE 與△ADE 等高	由(2) & (3) $\overline{AF}$為高
(5) △ABE 面積∶△ADE 面積＝$\overline{BE}$∶$\overline{DE}$	由(2) & (3) & (4) & 等高之三角形面積比為底邊長之比
(6) △BCE 中，$\overline{BE}$為底、$\overline{CG}$為高	由(1) 作$\overline{CG}\perp\overline{BD}$
(7) △CDE 中，$\overline{DE}$為底、$\overline{CG}$為高	由(1) 作$\overline{CG}\perp\overline{BD}$
(8) △BCE 與△CDE 等高	由(6) & (7) $\overline{CG}$為高
(9) △BCE 面積∶△CDE 面積＝$\overline{BE}$∶$\overline{DE}$	由(6) & (7) & (8) & 等高之三角形面積比為底邊長之比
(10) △ABE 面積：△ADE 面積 ＝△BCE 面積：△CDE 面積	由(5) & (9) 遞移律
(11) △ADE 面積×△BCE 面積 ＝△ABE 面積×△CDE 面積	由(10) & 內項乘積等於外項乘積

例題 9.1-54： **(四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積)**

如圖 9.1-57，E 點為四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點，已知△ADE 面積為 6 平方公分，△BCE 面積為 4 平方公分，△ABE 面積為 8 平方公分，則△CDE 面積為何？

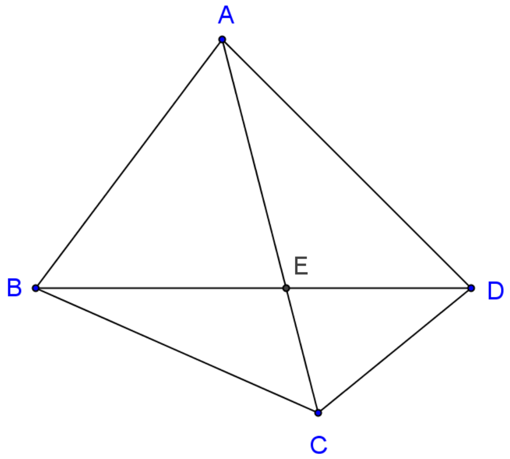


圖 9.1-57

想法：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積

解：

敘述	理由
(1) △ADE 面積×△BCE 面積 ＝△ABE 面積×△CDE 面積	已知 E 點為四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點 & 四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積
(2) (6 平方公分)×(4 平方公分) ＝(8 平方公分) ×△CDE 面積	由(1) & 已知△ADE 面積為 6 平方公分，△BCE 面積為 4 平方公分，△ABE 面積為 8 平方公分
(3) △CDE 面積 $=\dfrac{(6平方公分)\times(4平方公分)}{8平方公分}$ ＝3 平方公分	由(2) 等量除法公理

接下來，讓我們利用例題 9.1-43 所證明的結論：

等高之三角形面積比為底邊長之比。

來證明例題 9.1-55，並將例題 9.1-55 所得到的結果應用到例題 9.1-56~例題 9.1-59。

例題 9.1-55：　(平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形)

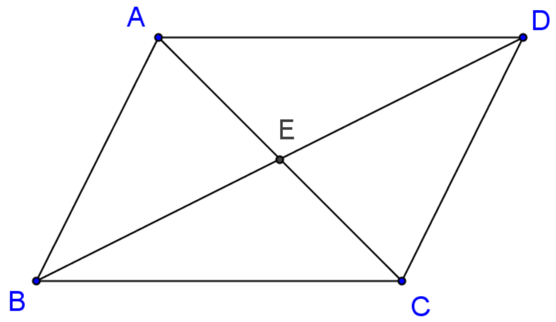


圖 9.1-58

已知：如圖 9.1-58，四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點

求證：△ABE 面積＝△ADE 面積＝△CDE 面積＝△BCE 面積＝$\frac{1}{4}$ABCD 面積

想法：(1) 平行四邊形對角線互相平分

(2) 等高之三角形面積比為底邊長之比

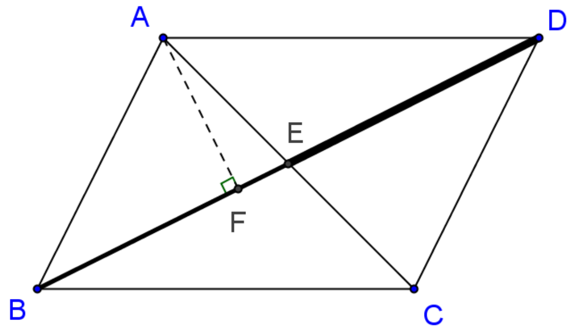


圖 9.1-58(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$，如圖 9.1-58(a)	作圖
(2) $\overline{BE}=\overline{DE}$ 且 $\overline{AE}=\overline{CE}$	已知 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 & 平行四邊形對角線互相平分
(3) △ABE 中，$\overline{BE}$為底，$\overline{AF}$為高	由(1) 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$

(4) △ADE 中，$\overline{DE}$為底，$\overline{AF}$為高	由(1) 作$\overline{AF}\perp\overline{BD}$
(5) △ABE 與△ADE 等高	由(3) & (4) $\overline{AF}$為高
(6) △ABE 面積∶△ADE 面積＝$\overline{BE}$∶$\overline{DE}$ ＝1∶1	由(5) & 等高之三角形面積比為底邊長之比 & (2) $\overline{BE}=\overline{DE}$
(7) △ABE 面積＝△ADE 面積	由(6) 外項乘積等於內項乘積
(8) 同理：△ADE 面積＝△CDE 面積 △CDE 面積＝△BCE 面積	重複步驟(1)~(7)
(9) △ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積	由(7) & (8) 遞移律
(10) ABCD 面積＝△ABE 面積＋△ADE 面積＋△CDE 面積＋△BCE 面積	全量等於分量之和
(11) △ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積 ＝$\frac{1}{4}$ABCD 面積	由(9) & (10)

例題 9.1-56：　(平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形)

如圖 9.1-59，四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ABE 面積為 10 平方公分，則 ABCD 面積為何？

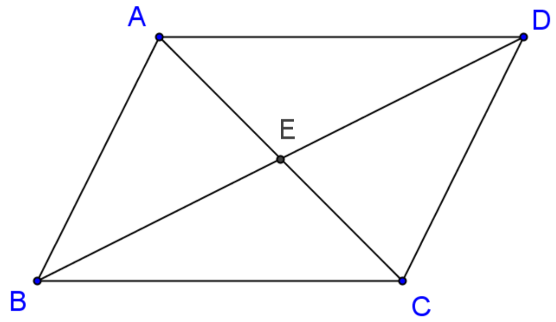


圖 9.1-59

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1)　△ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 ＆ 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形
(2)　ABCD 面積 ＝△ABE 面積＋△ADE 面積 ＋△CDE 面積＋△BCE 面積 ＝4×△ABE 面積 ＝4×(10 平方公分) ＝40 平方公分	如圖 9.1-59 所示 全量等於分量之和 ＆ 由(1)　△ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積 ＆ 已知△ABE 面積為 10 平方公分

例題 9.1-57： (平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形)

如圖 9.1-60，四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若 ABCD 面積為 20 平方公分，則△ABE 面積與△CDE 面積之和為多少平方公分？

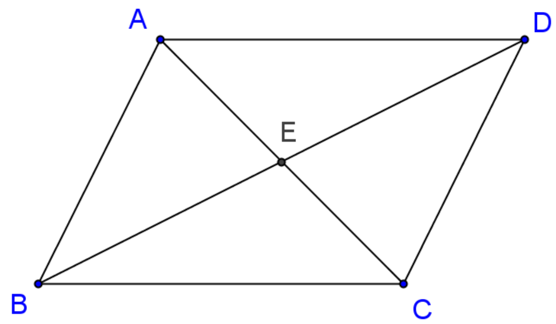


圖 9.1-60

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝△ADE 面積＝△CDE 面積＝△BCE 面積＝$\frac{1}{4}$ABCD 面積	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形
(2) △ABE 面積＝△CDE 面積＝$\frac{1}{4}$×(20 平方公分)＝5 平方公分	由(1) & 已知 ABCD 面積為 20 平方公分
(3) △ABE 面積＋△CDE 面積＝(5 平方公分)＋(5 平方公分)＝10 平方公分	題目所求 & (2) 已證

例題 9.1-58：　(平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形)

如圖 9.1-61，平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 O 點，若$\overline{OE}\perp\overline{CD}$，$\overline{OE}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝12 公分，且平行四邊形 ABCD 的周長為 56 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

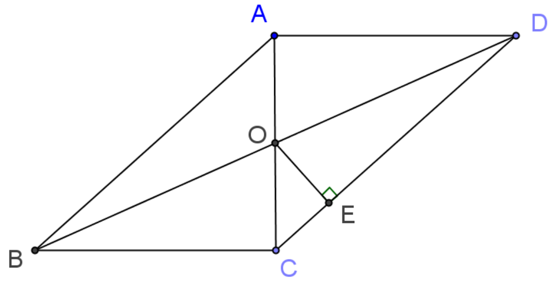


圖 9.1-61

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=\overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對邊等長
(2) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$＝56 公分	已知平行四邊形 ABCD 周長為 56 公分
(3) $\overline{CD}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{BC}$＝56 公分	由(1) & (2) 代換
(4) $2(\overline{BC}+\overline{CD})$＝56 公分	由(3) 式子整理
(5) $\overline{BC}+\overline{CD}$＝(56 公分)÷2＝28 公分	由(4) 等量除法公理
(6) $\overline{CD}$＝28 公分－$\overline{BC}$ ＝28 公分－12 公分＝16 公分	由(5) 等量減法公理 & 已知$\overline{BC}$＝12 公分
(7) △OCD 面積＝$\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OE}}{2}$ ＝$\dfrac{(16公分)\times(4公分)}{2}$ ＝32 平方公分	已知$\overline{OE}\perp\overline{CD}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半 & (6) $\overline{CD}$＝16 公分　已證 & 已知$\overline{OE}$＝4 公分
(8) △OAB 面積＝△OBC 面積 ＝△OCA 面積＝△OCD 面積 ＝32 平方公分	已知平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 O 點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形 & (7) △OCD 面積＝32 平方公分 已證
(9) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝△OAB 面積＋△OBC 面積 ＋△OCA 面積＋△OCD 面積 ＝4×(32 平方公分) ＝128 平方公分	全量等於分量之和 & (8) △OAB 面積＝△OBC 面積 ＝△OCA 面積＝△OCD 面積 ＝32 平方公分　已證

例題 9.1-59： (平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形)

如圖 9.1-62，平行四邊形 ABCD 與 CDEF 中，P、Q 分別為其對角線交點，已知四邊形 CPDQ 面積為 15 平方公分，△CQF 面積為 6 平方公分，求四邊形 ABCD 的面積。

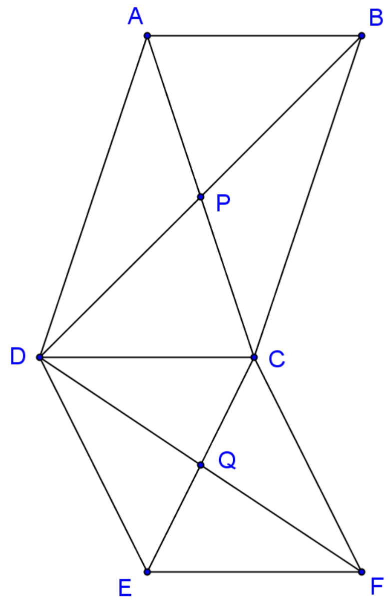


圖 9.1-62

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 CDEF 中 △CQD 面積＝△CQF 面積 ＝6 平方公分	已知平行四邊形 CDEF 中，Q 為其對角線交點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形 & 已知△CQF 面積為 6 平方公分
(2) 四邊形 CPDQ 面積 ＝△CQD 面積＋△CPD 面積	如圖 9.1-62 所示 全量等於分量之和
(3) △CPD 面積 ＝四邊形 CPDQ 面積－△CQD 面積 ＝(15 平方公分)－(6 平方公分) ＝9 平方公分	由(2) 等量減法公理 & 已知四邊形 CPDQ 面積為 15 平方公分 & (1) △CQD 面積＝6 平方公分
(4) 平行四邊形 ABCD 中 △CDP 面積＝$\frac{1}{4}$ABCD 面積	已知平行四邊形 ABCD 中，P 為其對角線交點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形
(5) 四邊形 ABCD 面積 ＝4×△CDP 面積＝4×(9 平方公分) ＝36 平方公分	由(4) 等量乘法公理 & 由(3) △CPD 面積＝9 平方公分

定理 9.1-5 三角形邊長與面積定理(海龍公式)

設△ABC 的三邊長為 a、b、c，且 s＝$\frac{a+b+c}{2}$，

則△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

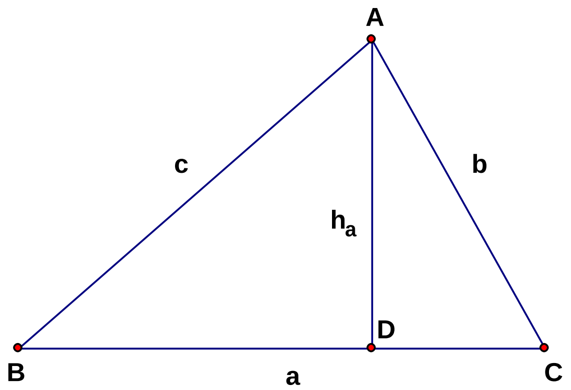


圖 9.1-63

已知：如圖 9.1-63，a、b、c 分別為△ABC 的三邊長，$\overline{AD}$＝h_a 為$\overline{BC}$上的高，且假設 a＋b＋c＝2s。

求證：△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

想法：(1) 利用畢氏定理算出 h_a 與 a、b、c 的關係。

(2) 三角形面積為底與高乘積的一半。

證明：

敘述	理由
(1) △ABD 為直角三角形 $h_a^2+\overline{BD}^2=c^2$	已知$\overline{AD}$＝h_a 為$\overline{BC}$上的高 & 畢氏定理
(2) $h_a^2=c^2-\overline{BD}^2=(c+\overline{BD})(c-\overline{BD})$	由(1) 等量減法公理 & 因式分解
(3) $b^2=a^2+c^2-2\times a\times\overline{BD}$	定理 8.3-4 畢氏定理推廣
(4) $\overline{BD}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$	由(3)
(5) $h_a^2=(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a})(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a})$	將(4)式代入(2)式得
$=(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a})(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a})$	通分

$=[\dfrac{(a^2+2ac+c^2)-b^2}{2a}][\dfrac{b^2-(a^2-2ac+c^2)}{2a}]$	加法交換律 ＆ 結合律
$=[\dfrac{(a+c)^2-b^2}{2a}][\dfrac{b^2-(a-c)^2}{2a}]$	和的平方公式因式分解
$=[\dfrac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}][\dfrac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}]$	平方差公式因式分解
$=\dfrac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$	分數乘法
$=\dfrac{(2s)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2}$	假設 a＋b＋c＝2s
$=\dfrac{2s\times 2(s-b)\times 2(s-c)\times 2(s-a)}{4a^2}$	提出公因數 2
$=\dfrac{4s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}{a^2}$	約分 ＆ 乘法交換律
(6) $h_a^2=\dfrac{4s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}{a^2}$	由(5)
(7) $h_a=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$ 或 $h_a=-\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$	由(6) 求 h_a 的平方根
(8) $h_a=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$	由(7) ＆ h_a 為線段長度必大於 0
(9) 三角形△ABC 的面積＝$\dfrac{a\times h_a}{2}$	已知$\overline{AD}$＝h_a 為$\overline{BC}$上的高 ＆ 三角形面積定理
$=\dfrac{a}{2}\times\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$	將(8) 式代入
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	約分
(10) 所以△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	由(9) 已證
(其中 s＝$\dfrac{a+b+c}{2}$)	＆ 假設 a＋b＋c＝2s

Q. E. D.

例題 9.1-60：

如圖 9.1-64，已知△ABC 中，$\overline{AB}$＝4 公分、$\overline{BC}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分，則△ABC 的面積為何？

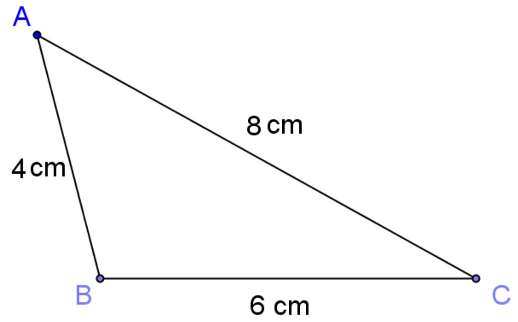


圖 9.1-64

想法：△ABC 的三邊長為 a、b、c，且 s＝$\frac{a+b+c}{2}$，

則△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

解：

敘述	理由
(1) s＝$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{2}$ ＝$\frac{(4公分)+(6公分)+(8公分)}{2}$ ＝9 公分	已知$\overline{AB}$＝4 公分、$\overline{BC}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分
(2) △ABC 的面積 ＝$\sqrt{s(s-\overline{AB})(s-\overline{BC})(s-\overline{AC})}$ ＝$\sqrt{9公分(9公分-4公分)(9公分-6公分)(9公分-8公分)}$ ＝$\sqrt{135公分^4}$ ＝$3\sqrt{15}$ 平方公分	若△ABC 的三邊長為 a、b、c，且 s＝$\frac{a+b+c}{2}$，則△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ & 已知△ABC 中，$\overline{AB}$＝4 公分、$\overline{BC}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分 & (1) s＝9 公分

定理 9.1-6 梯形面積定理

梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半。

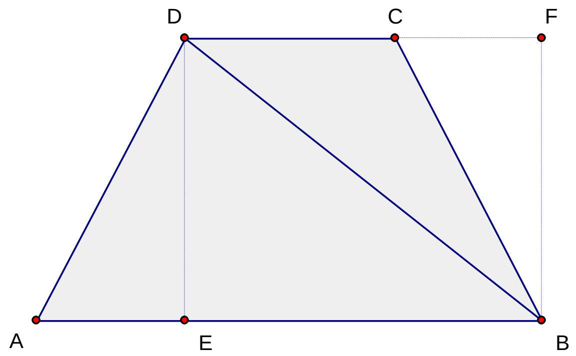


圖 9.1-65

已知：梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{DE}$為高，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$。

求證：梯形 ABCD 的面積＝$\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DE}}{2}$ 。

想法：將梯形分為二個三角形，再利用三角形面積定理。

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{BD}$，如圖 9.1-65	過兩點可作一直線
(2) 過 B 點，作$\overline{BF}\perp\overrightarrow{DC}$交於 F 點，如圖 9.1-65	垂直作圖
(3) $\overline{CD}\parallel\overline{AB}$	已知 ABCD 為梯形 & 梯形定義
(4) $\overline{DE}=\overline{BF}$	由(3) & 已知$\overline{DE}\perp\overline{AB}$ & (2) 作$\overline{BF}\perp\overrightarrow{DC}$ & 平行線間的平行線段相等
(5) $\triangle ABD=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{DE}}{2}$	已知$\overline{DE}\perp\overline{AB}$ & 三角形面積定理
(6) $\triangle DCB=\dfrac{\overline{CD}\times\overline{BF}}{2}=\dfrac{\overline{CD}\times\overline{DE}}{2}$	由(2) 作$\overline{BF}\perp\overrightarrow{DC}$ & 三角形面積定理 將(4) $\overline{DE}=\overline{BF}$ 代入
(7) 梯形 ABCD＝$\triangle ABD+\triangle DCB$	如圖 9.1-65 所示，全量等於分量的總和 &
$=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{DE}}{2}+\dfrac{\overline{CD}\times\overline{DE}}{2}$	將(5)、(6) 代入
$=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DE}}{2}$	通分 & 分配律

Q. E. D.

例題 9.1-61：

如圖 9.1-66，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$=3 公分，$\overline{CD}$=7 公分，$\overline{BE}$=4 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

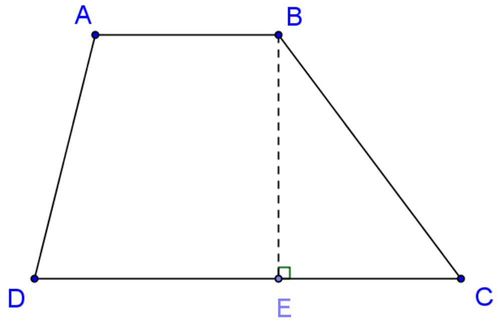


圖 9.1-66

想法：梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BE}}{2}$ $=\dfrac{(3公分+7公分)\times 4公分}{2}$ =20 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$=3 公分，$\overline{CD}$=7 公分，$\overline{BE}$=4 公分

例題 9.1-62：

如圖 9.1-67，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{CD}$＝10 公分，若梯形 ABCD 面積為 45 平方公分，則$\overline{BE}$＝？

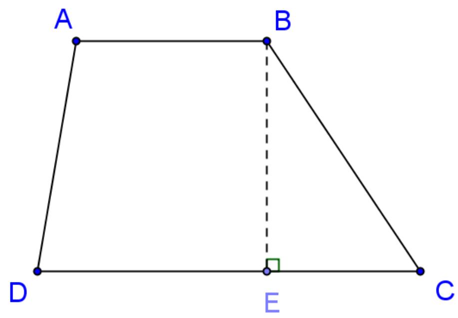


圖 9.1-67

想法：梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 面積＝$\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BE}}{2}$	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 ＆ 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為兩底，$\overline{BE}$為高
(2) 45 平方公分＝$\dfrac{(5公分+10公分)\times\overline{\mathrm{BE}}}{2}$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{CD}$＝10 公分，梯形 ABCD 面積為 45 平方公分
(3) (5 公分＋10 公分)x$\overline{BE}$＝(45 平方公分)x2	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BE}$＝2x(45 平方公分)÷(5 公分＋10 公分) ＝6 公分	由(3) 等量除法公理

例題 9.1-63：

如圖 9.1-68，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BE}$＝5 公分，若梯形 ABCD 面積為 35 平方公分，則$\overline{CD}$＝？

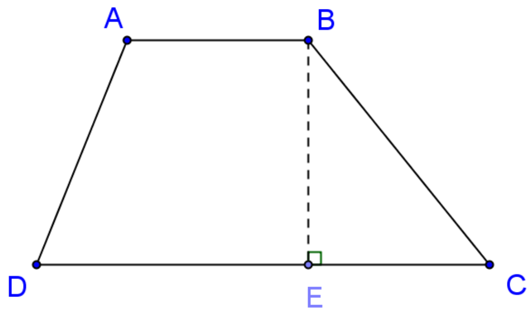


圖 9.1-68

想法：梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 面積＝$\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BE}}{2}$	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高
(2) 35 平方公分＝$\dfrac{(4\text{公分}+\overline{\text{CD}})\times 5\text{公分}}{2}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BE}$＝5 公分，梯形 ABCD 面積為 35 平方公分
(3) (4 公分＋$\overline{CD}$)x5 公分＝(35 平方公分)x2	由(2) 等量乘法公理
(4) 4 公分＋$\overline{CD}$＝(35 平方公分)x2÷(5 公分)	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{CD}$＝ (35 平方公分)x2÷(5 公分)－4 公分 ＝10 公分	由(4) 等量減法公理

在練習完基本的梯形面積題型後，讓我們利用第六章所學等腰梯形的性質與第八章所學的畢氏定理，來作以下例題 9.1-64~例題 9.1-65。

例題 9.1-64：

如圖 9.1-69，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，且$\overline{AB}$＝3 公分，$\overline{CD}$＝9 公分，若$\overline{BC}$＝5 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

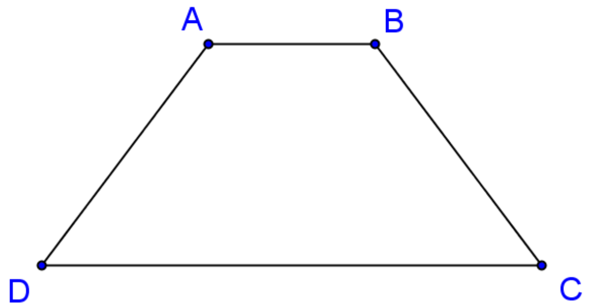


圖 9.1-69

想法：(1) 利用畢氏定理求出梯形的高

(2) 梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

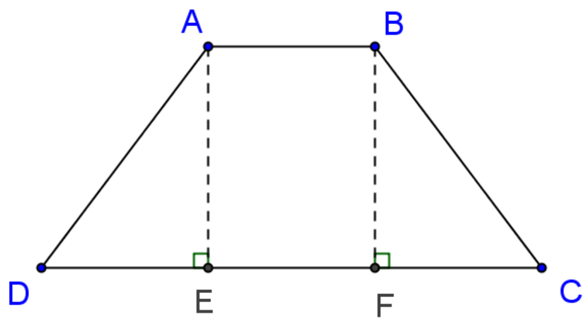


圖 9.1-69(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{CD}$， 過 B 點作$\overline{BF}\perp\overline{CD}$， 如圖 9.1-69(a)	作圖
(2) $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$	由(1) $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ & 垂直於同一直線之兩線互相平行
(3) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知 ABCD 為梯形 & 梯形一組對邊平行
(4) 四邊形 ABFE 為平行四邊形	由(2) & (3) 兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形

(5) $\overline{AE}=\overline{BF}$ & $\overline{EF}=\overline{AB}=3$ 公分	由(4) & 平行四邊形對邊等長 & 已知$\overline{AB}=3$ 公分
(6) 在△ADE 與△BCF 中 $\overline{AD}=\overline{BC}$ $\overline{AE}=\overline{BF}$ ∠AED＝∠BFC＝90°	如圖 9-69(a)所示 已知 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長 由(5) $\overline{AE}=\overline{BF}$ 已證 由(1) $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & $\overline{BF}\perp\overline{CD}$
(7) △ADE ≅ △BCF	由(6) & 根據三角形 R.S.H.全等定理
(8) $\overline{DE}=\overline{CF}$	由(7) & 兩全等三角形之對應邊相等
(9) $\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{EF}+\overline{DE}$ $=\overline{CF}+\overline{EF}+\overline{CF}$ $=2\overline{CF}+\overline{EF}$	如圖 9-69(a)，全量等於分量之和 將(8) $\overline{DE}=\overline{CF}$ 代入 加法交換律 & 結合律
(10) $2\overline{CF}=\overline{CD}-\overline{EF}$	由(9) 等量減法公理
(11) $\overline{CF}=(\overline{CD}-\overline{EF})\div 2$ ＝(9 公分－3 公分)÷2 ＝3 公分	由(10) 等量除法公理 & 將已知$\overline{CD}=9$ 公分 & (5) $\overline{EF}=3$ 公分代入
(12) 直角三角形 BCF 中 $\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$	由(1) $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ 畢氏定理
(13) $\overline{BF}^2=\overline{BC}^2-\overline{CF}^2$ ＝(5 公分)^2－(3 公分)^2 ＝16 平方公分	由(12) 等量減法公理 & 將已知$\overline{BC}=5$ 公分 & (11) $\overline{CF}=3$ 公分代入
(14) $\overline{BF}=4$ 公分 或 $\overline{BF}=-4$ 公分	由(13) 求平方根
(15) $\overline{BF}=4$ 公分	由(14) & $\overline{BF}$為線段長度必大於 0
(16) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BF}}{2}$ $=\dfrac{(3公分+9公分)\times 4公分}{2}$ ＝24 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底， 且$\overline{AB}=3$ 公分，$\overline{CD}=9$ 公分 & (1) $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ & (15) $\overline{BF}=4$ 公分

例題 9.1-65：

如圖 9.1-70，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AE} \perp \overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}=25$ 公分，$\overline{AD}=8$ 公分，$\overline{AE}=24$ 公分，求梯形 ABCD 面積為何？

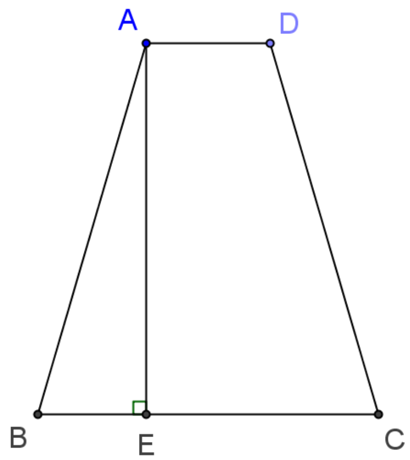


圖 9.1-70

想法：(1) 利用畢氏定理求出梯形的下底

(2) 梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

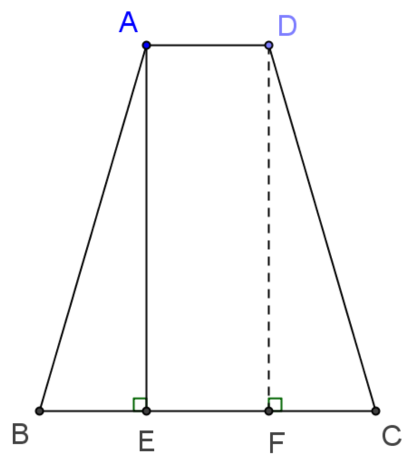


圖 9.1-70(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 D 點作$\overline{DF} \perp \overline{BC}$，如圖 9.1-70(a)	作圖
(2) $\overline{AE} \parallel \overline{DF}$	已知$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ & (1) 作$\overline{DF} \perp \overline{BC}$ & 垂直於同一直線之兩線互相平行
(3) 四邊形 ADFE 為平行四邊形	已知$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & (2) $\overline{AE} \parallel \overline{DF}$ 兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形

(4) $\overline{EF}=\overline{AD}=8$ 公分 & $\overline{DF}=\overline{AE}=24$ 公分	由(3) & 平行四邊形對邊等長 & 已知$\overline{AD}=8$ 公分，$\overline{AE}=24$ 公分
(5) 在△ABE 與△DCF 中 $\overline{AB}=\overline{DC}$ $\overline{AE}=\overline{DF}$ $\angle AEB=\angle DFC=90°$	如圖 9.1-70(a)所示 已知$\overline{AB}=\overline{CD}=25$ 公分 由(4) $\overline{DF}=\overline{AE}=24$ 公分 已證 已知$\overline{AE}\perp\overline{BC}$ & (1) 作$\overline{DF}\perp\overline{BC}$
(6) △ABE ≅ △DCF	由(5) & 根據三角形 R.S.H.全等定理
(7) $\overline{BE}=\overline{CF}$	由(6) & 兩全等三角形之對應邊相等
(8) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{CF}$ $=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{BE}$ $=2\overline{BE}+\overline{EF}$	如圖 9.1-70(a)，全量等於分量之和 將(7) $\overline{BE}=\overline{CF}$ 代入 加法交換律 & 結合律
(9) 直角三角形 ABE 中 $\overline{BE}^2+\overline{AE}^2=\overline{AB}^2$	已知$\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 畢氏定理
(10) $\overline{BE}^2=\overline{AB}^2-\overline{AE}^2$ $=(25$ 公分$)^2-(24$ 公分$)^2$ $=49$ 平方公分	由(9) 等量減法公理 將已知$\overline{AB}=25$ 公分，$\overline{AE}=24$ 公分 代入
(11) $\overline{BE}=7$ 公分 或 $\overline{BE}=-7$ 公分	由(10) 求平方根
(12) $\overline{BE}=7$ 公分	由(11) & $\overline{BE}$為線段長度必大於 0
(13) $\overline{BC}=2\times(7$ 公分$)+8$ 公分 $=22$ 公分	將(12) $\overline{BE}=7$ 公分 代入(8) $\overline{BC}=2\overline{BE}+\overline{EF}$
(14) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}}{2}$ $=\dfrac{(8\text{公分}+22\text{公分})\times 24\text{公分}}{2}$ $=360$ 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$， $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{AD}=8$ 公分，$\overline{AE}=24$ 公分 & (13) $\overline{BC}=22$ 公分 已證

在練習完等腰梯形的面積題型後，讓我們利用第六章中提到梯形中線的性質，來證明以下例題 9.1-66。

例題 9.1-66：　（梯形面積等於中線長與高的乘積）

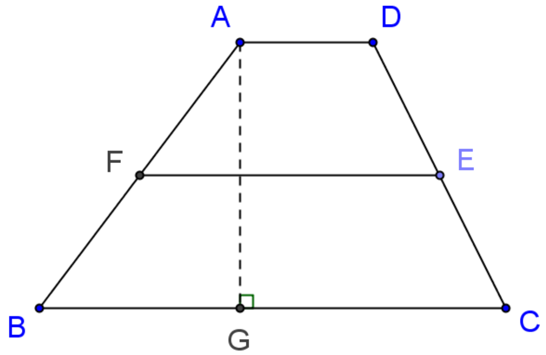


圖 9.1-71

已知： 如圖 9.1-71，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為中線，$\overline{AG}$為高

求證： 梯形 ABCD 面積＝$\overline{EF} \times \overline{AG}$

想法： (1) 梯形中線長等於兩底和的一半

(2) 梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}$與$\overline{BC}$分別為梯形的兩底	已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
(2) $\overline{EF} = \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}$	已知梯形 ABCD 中，$\overline{EF}$為中線 & (1) & 梯形中線長等於兩底和的一半
(3) 梯形 ABCD 面積 $= \dfrac{(\overline{AD}+\overline{BC}) \times \overline{AG}}{2}$	由(1) $\overline{AD}$與$\overline{BC}$分別為梯形的兩底 & 已知$\overline{AG}$為梯形 ABCD 的高 & 梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半
(4) 梯形 ABCD 面積＝$\overline{EF} \times \overline{AG}$	將(2)式代入(3)式得

由例題 9.1-66，我們得到以下這個結論：**梯形面積等於中線長與高的乘積。** 接下來，就讓我們將例題 9.1-66 的結論，運用在以下例題 9.1-67~例題 9.1-68。

例題 9.1-67： **（梯形面積等於中線長與高的乘積）**

如圖 9.1-72，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，已知$\overline{EF}$＝11 公分，$\overline{AG}$＝8 公分，求梯形 ABCD 的面積。

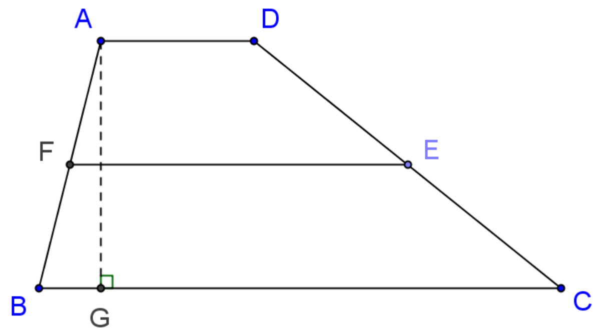


圖 9.1-72

想法：梯形面積等於中線長與高的乘積

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 的面積＝$\overline{EF}\times\overline{AG}$	梯形面積等於中線長與高的乘積 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高
(2) 梯形 ABCD 的面積 ＝(11 公分)×(8 公分) ＝88 平方公分	由(1) & 已知$\overline{EF}$＝11 公分，$\overline{AG}$＝8 公分

例題 9.1-68：　（梯形面積等於中線長與高的乘積）

如圖 9.1-73，已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，若$\overline{AG}$＝4 公分，且梯形 ABCD 的面積為 32 平方公分，求$\overline{EF}$＝？

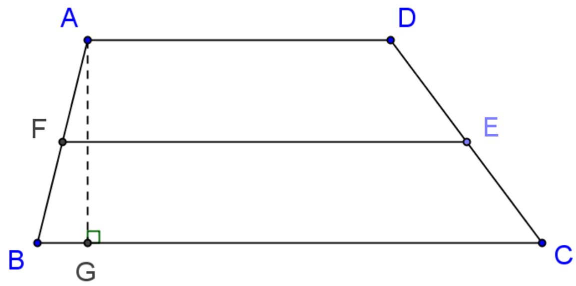


圖 9.1-73

想法：梯形面積等於中線長與高的乘積

解：

敘述	理由
(1)　梯形 ABCD 的面積＝$\overline{EF}\times\overline{AG}$	梯形面積等於中線長與高的乘積 ＆ 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高
(2)　32 平方公分＝$\overline{EF}$×(4 公分)	由(1) ＆ 已知$\overline{AG}$＝4 公分，且梯形 ABCD 的面積為 32 平方公分
(3)　$\overline{EF}$＝(32 平方公分)÷(4 公分) ＝8 公分	由(2) 等量除法公理

接下來，讓我們利用例題 9.1-41 的結論：**同底等高之三角形面積皆相等。** 來證明以下例題 9.1-69。

例題 9.1-69：

已知：如圖 9.1-74，梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點
求證：△ABE 面積＝△DCE 面積

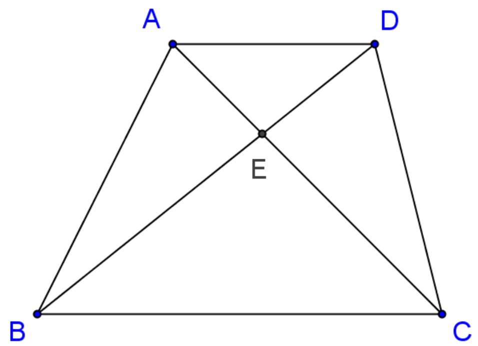


圖 9.1-74

想法：(1) 先求出△ABC 面積＝△DCB 面積

(2) 同時減掉△CBE 面積，即可得△ABE 面積＝△DCE 面積

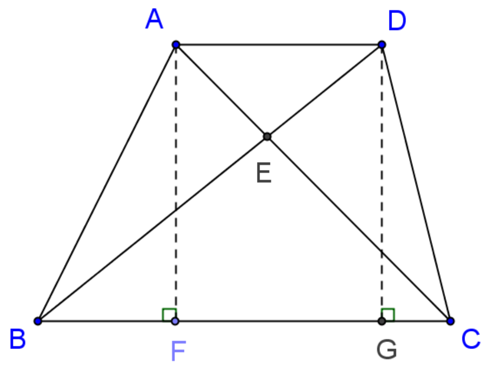


圖 9.1-74(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AF}\perp\overline{BC}$ 過 D 點作$\overline{DG}\perp\overline{BC}$， 如圖 9.1-74(a)	作圖
(2) $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$	已知 ABCD 為梯形 & 梯形一組對邊平行
(3) $\overline{AF}=\overline{DG}$	由(1) & (2) & 兩平行線間的距離不變

(4) △ABC 中，$\overline{BC}$為底，$\overline{AF}$為高	由(1) 過 A 點作$\overline{AF}\perp\overline{BC}$
(5) △DBC 中，$\overline{BC}$為底，$\overline{DG}$為高	由(1) 過 D 點作$\overline{DG}\perp\overline{BC}$
(6) △ABC 與△DBC 同底等高	由(3) ＆ (4) ＆ (5)
(7) △ABC 面積＝△DBC 面積	由(6) ＆ 同底等高之三角形面積皆相等
(8) △ABC 面積 ＝△ABE 面積＋△BCE 面積	全量等於分量之和
(9) △DBC 面積 ＝△DCE 面積＋△BCE 面積	全量等於分量之和
(10) △ABE 面積＋△BCE 面積 ＝△DCE 面積＋△BCE 面積	由(7) ＆ (8) ＆ (9)
(11) △ABE 面積＝△DCE 面積	由(10) 等量減法公理

在證明完例題 9.1-69 後，再搭配上例題 9.1-53 的結論：**四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積**。我們來練習以下例題 9.1-70。

例題 9.1-70：

如圖 9.1-75，梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ADE 面積為 4 平方公分，△BCE 面積為 9 平方公分，求△ABE 面積與△DCE 面積各為何？

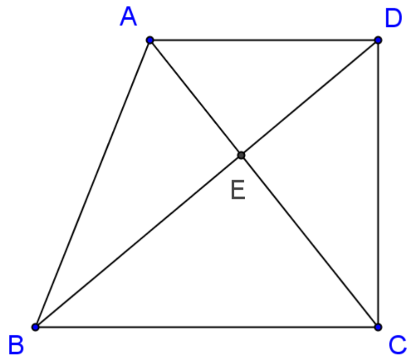


圖 9.1-75

想法：(1) 利用例題 9.1-65 結論：梯形 ABCD 中，若兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，則△ABE 面積＝△DCE 面積

(2) 利用例題 9.1-49 的結論：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝△DCE 面積	已知梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 & 例題 9.1-65 結論
(2) 假設△ABE 面積＝△DCE 面積＝a 平方公分	由(1) & 假設
(3) △ADE 面積×△BCE 面積＝△ABE 面積×△DCE 面積	利用例題 9.1-49 的結論：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積
(4) (4 平方公分)×(9 平方公分)＝(a 平方公分)×(a 平方公分)	由(3) & 已知△ADE 面積為 4 平方公分，△BCE 面積為 9 平方公分 & (2) 假設
(5) a^2＝36	由(4)
(6) a＝6 或 a＝－6	由(5) 求平方根
(7) a＝6	由(6) & a 為三角形面積必大於 0
(8) 所以△ABE 面積＝△DCE 面積＝6 平方公分	由(2) & (7)

接下來，讓我們將面積應用在相似形上，看看面積與對應邊之間的關係。

例題 9.1-71：　(相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比)

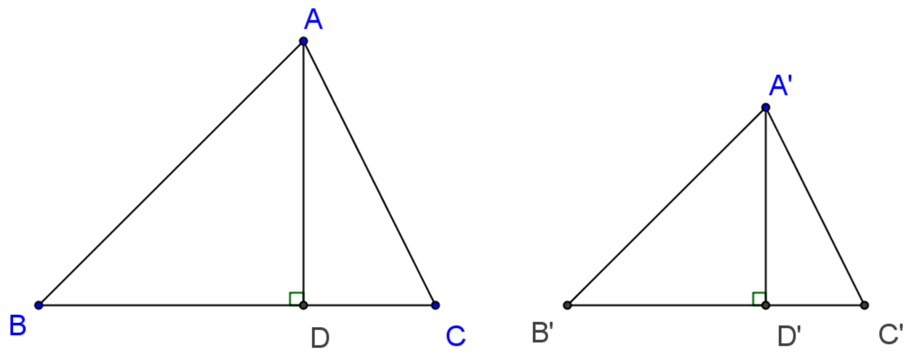


圖 9.1-76

已知：如圖 9.1-76，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高

求證：$\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$

想法：(1) 相似三角形對應高的比等於對應邊的比**(定理 8.2-8)**

(2) 三角形面積等於底與高乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$	相似三角形對應高的比等於對應邊的比 & 已知△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高
(2) $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}}{\frac{1}{2}\times\overline{B'C'}\times\overline{A'D'}}=(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}})\times(\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}})$	三角形面積等於底與高乘積的一半 & 已知$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高 & 倍比定理
(3) $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}=(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}})\times(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}})=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$	將(1) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ & $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ 代入(2) 式得

(4) $\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積} = (\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}) \times (\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}) = \dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$	將(1) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ 代入(2) 式得
(5) $\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積} = (\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}) \times (\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}) = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$	將(1) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ & $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ 代入(2) 式得
(6) $\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積} = (\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}) \times (\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}) = \dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$	將(1) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$ 代入(2) 式得
(7) $\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$	由(3)~(6) 遞移律

由上述例題 9.1-67 中，我們知道當 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$ 時，

則 $\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$。(即**比值相同時，比值的平方亦相等**)

例題 9.1-72：　(相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比)

如圖 9.1-77，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{AD}$＝8 公分，$\overline{A'D'}$＝6 公分，則 $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}$ 為何？

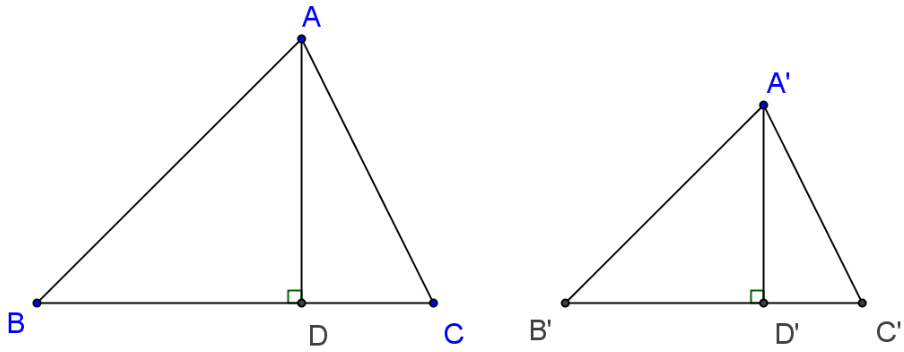


圖 9.1-77

想法：相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}$ $=\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}=\dfrac{(8\text{公分})^2}{(6\text{公分})^2}$ $=\dfrac{64\text{平方公分}}{36\text{平方公分}}=\dfrac{16}{9}$	已知△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，$\overline{AD}$＝8 公分，$\overline{A'D'}$＝6 公分 & 相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比

例題 9.1-73：　(相似多邊形面積比等於對應邊的平方比)

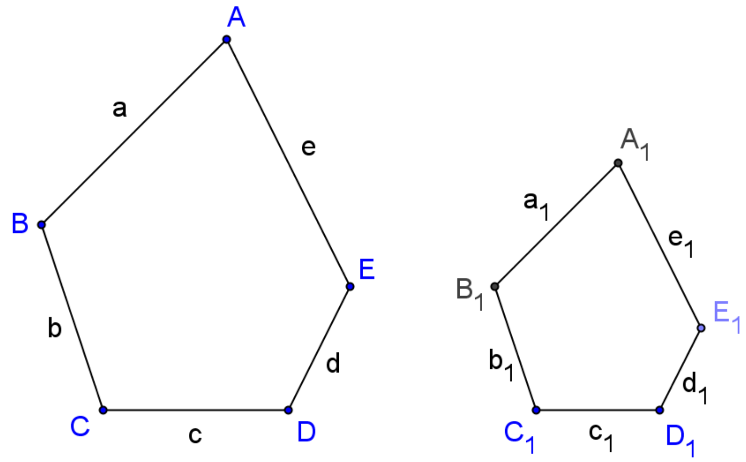


圖 9.1-78

已知：如圖 9.1-78，多邊形 ABCDE 與多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 為兩邊數相等的相似多邊形

求證：$\dfrac{\text{多邊形ABCDE面積}}{\text{多邊形}A_1B_1C_1D_1E_1\text{面積}}=\dfrac{a^2}{a_1^{\,2}}=\dfrac{b^2}{b_1^{\,2}}=\dfrac{c^2}{c_1^{\,2}}=\dfrac{d^2}{d_1^{\,2}}=\dfrac{e^2}{e_1^{\,2}}$

想法：(1) 相似多邊形對應邊成比例

(2) 定理 8.2-9 相似多邊形分成定理：兩相似多邊形，可分成個數相同的相似三角形，且其關係位置相同

(3) 相似三角形面積比等於對應邊的平方比

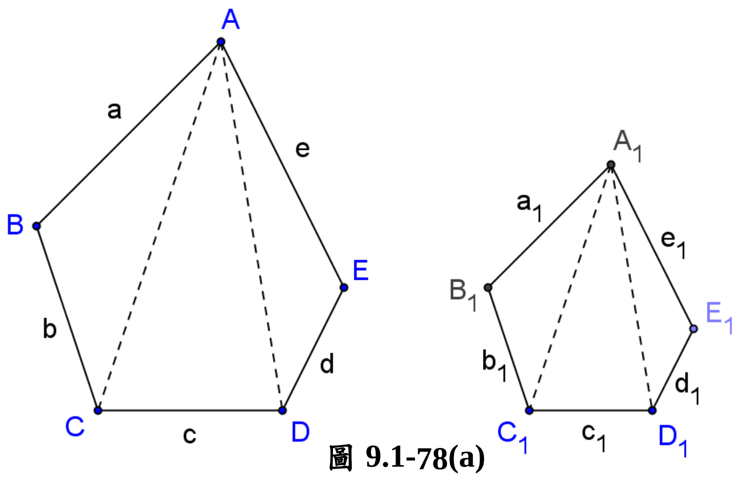


圖 9.1-78(a)

證明：

敘述	理由
(1) $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}=\dfrac{d}{d_1}=\dfrac{e}{e_1}=\mathrm{r}$	已知多邊形 ABCDE 與多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 為兩邊數相等的相似多邊形 & 相似多邊形對應邊成比例

(2) $\dfrac{a^2}{a_1^{\,2}}=\dfrac{b^2}{b_1^{\,2}}=\dfrac{c^2}{c_1^{\,2}}=\dfrac{d^2}{d_1^{\,2}}=\dfrac{e^2}{e_1^{\,2}}=\text{r}^2$	由(1) & 比值相同時，比值的平方亦相等
(3) 作$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{A_1C_1}$與$\overline{A_1D_1}$， 如上圖 9.1-78(a)所示，則 $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ACD\sim\triangle A_1C_1D_1$ $\triangle ADE\sim\triangle A_1D_1E_1$	作圖 & 已知多邊形 ABCDE 與多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 為兩邊數相等的相似多邊形 & **定理 8.2-9** 相似多邊形分成定理：兩相似多邊形，可分成個數相同的相似三角形，且其關係位置相同
(4) $\dfrac{\Delta\text{ABC面積}}{\Delta\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{面積}}=\dfrac{a^2}{a_1^{\,2}}=\dfrac{b^2}{b_1^{\,2}}=\text{r}^2$ (即$\triangle$ABC 面積＝$\triangle A_1B_1C_1$ 面積$\times r^2$)	由(3) & 相似三角形面積比等於對應邊的平方比 & (2) $\dfrac{a^2}{a_1^{\,2}}=\dfrac{b^2}{b_1^{\,2}}=\text{r}^2$
(5) $\dfrac{\Delta\text{ACD面積}}{\Delta\text{A}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{面積}}=\dfrac{c^2}{c_1^{\,2}}=\text{r}^2$ (即$\triangle$ACD 面積＝$\triangle A_1C_1D_1$ 面積$\times r^2$)	由(3) & 相似三角形面積比等於對應邊的平方比 & (2) $\dfrac{c^2}{c_1^{\,2}}=\text{r}^2$
(6) $\dfrac{\Delta\text{ADE面積}}{\Delta\text{A}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積}}=\dfrac{d^2}{d_1^{\,2}}=\dfrac{e^2}{e_1^{\,2}}=\text{r}^2$ (即$\triangle$ADE 面積＝$\triangle A_1D_1E_1$ 面積$\times r^2$)	由(3) & 相似三角形面積比等於對應邊的平方比 & (2) $\dfrac{d^2}{d_1^{\,2}}=\dfrac{e^2}{e_1^{\,2}}=\text{r}^2$
(7) $\dfrac{\text{多邊形ABCDE面積}}{\text{多邊形A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積}}$ $=\dfrac{\Delta\text{ABC面積}+\Delta\text{ACD面積}+\Delta\text{ADE面積}}{\Delta\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積}}$ $=\dfrac{(\Delta\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積})\times\text{r}^2}{(\Delta\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{面積}+\Delta\text{A}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積})}$ $=\text{r}^2$	題目所求 & 全量等於分量之和 將(4) $\triangle$ABC 面積 ＝$\triangle A_1B_1C_1$ 面積$\times r^2$ (5) $\triangle$ACD 面積 ＝$\triangle A_1C_1D_1$ 面積$\times r^2$ (6) $\triangle$ADE 面積 ＝$\triangle A_1D_1E_1$ 面積$\times r^2$ 代入
(8) 所以$\dfrac{\text{多邊形ABCDE面積}}{\text{多邊形A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{E}_1\text{面積}}$ $=\dfrac{a^2}{a_1^{\,2}}=\dfrac{b^2}{b_1^{\,2}}=\dfrac{c^2}{c_1^{\,2}}=\dfrac{d^2}{d_1^{\,2}}=\dfrac{e^2}{e_1^{\,2}}$	由(2) & (7) 遞移律

例題 9.1-74：　(相似多邊形面積比等於對應邊的平方比)

如圖 9.1-79，五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 相似，已知$\overline{CD}$＝3 公分、$\overline{C_1D_1}$＝2 公分，若五邊形 ABCDE 面積為 19 平方公分，則五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 面積為何？

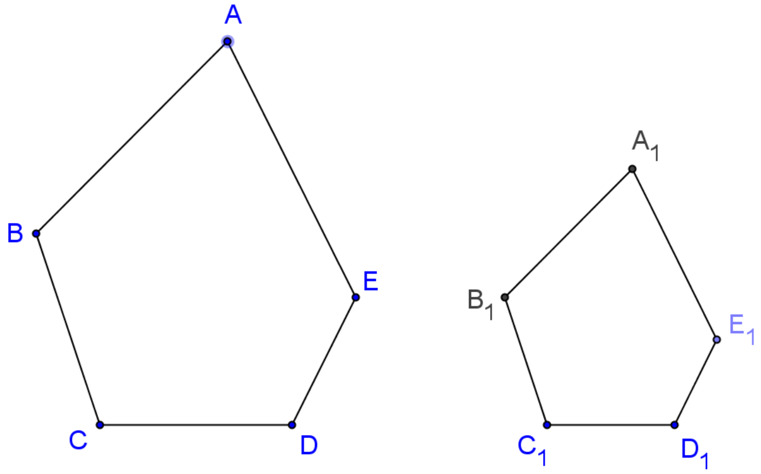


圖 9.1-79

想法：相似多邊形面積比等於對應邊的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\text{五邊形ABCDE面積}}{\text{五邊形}A_1B_1C_1D_1E_1\text{面積}}=\dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{C_1D_1}^2}$	已知五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 相似 ＆ 相似多邊形面積比等於對應邊的平方比
(2) $\dfrac{\text{19平方公分}}{\text{五邊形}A_1B_1C_1D_1E_1\text{面積}}=\dfrac{(3\text{公分})^2}{(2\text{公分})^2}$	由(1) ＆ 已知$\overline{CD}$＝3 公分、$\overline{C_1D_1}$＝2 公分，五邊形 ABCDE 面積為 19 平方公分
(3) 五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 面積 ＝(19 平方公分)×(2 公分)^2÷(3 公分)^2 ＝$\dfrac{76}{9}$ 平方公分	由(2) 求五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 面積

在本節的最後，讓我們利用面積來證明之前證明過的定理，在以下的例題 9.1-75 中，我們將利用例題 9.1-43 所證明的結論：**等高之三角形面積比為底邊長之比**。來證明第八章中所提到的**定理 8.1-14：三角形內角平分線定理：(三角形內分比定理)**。

例題 9.1-75： 三角形內角平分線定理： (三角形內分比定理)

三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。

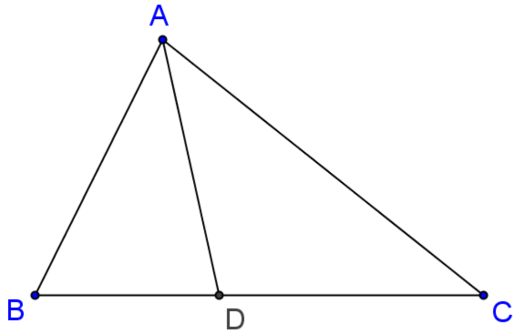


圖 9.1-80

已知： 如圖 9.1-80，△ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線。

求證： $\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$：$\overline{DC}$

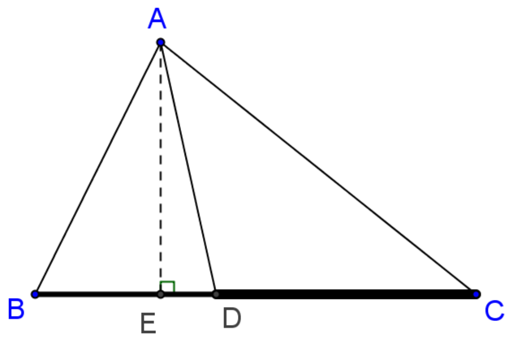


圖 9.1-80(a)

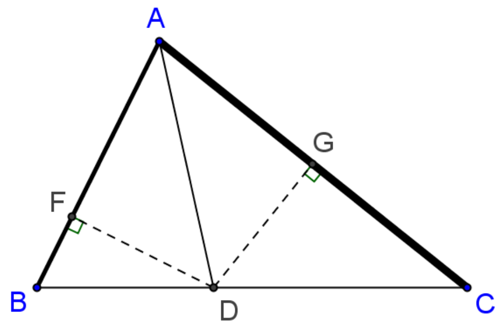


圖 9.1- 80(b)

想法： 等高之三角形面積比為底邊長之比

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，如圖 9.1- 80(a)	作圖
(2) △ABD 中，$\overline{BD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(3) △ACD 中，$\overline{CD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(4) △ABD 與△ACD 等高	由(2) & (3) $\overline{AE}$為高
(5) △ABD 面積：△ACD 面積＝$\overline{BD}$：$\overline{CD}$	由(2) 、(3) & (4) & 等高之三角形面積比為底邊長之比

(6) 過 D 點分別作$\overline{DF}\perp\overline{AB}$、$\overline{DG}\perp\overline{AC}$，如圖 9.1- 80(b)，則$\overline{DF}=\overline{DG}$	作圖 & 已知$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線 & 角平分線上任一點到角的兩邊等距離
(7) △ABD 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{DF}$為高	由(6) $\overline{DF}\perp\overline{AB}$
(8) △ACD 中，$\overline{AC}$為底、$\overline{DG}$為高	由(6) $\overline{DG}\perp\overline{AC}$
(9) △ABD 與△ACD 等高	由(6) $\overline{DF}=\overline{DG}$ & (7) $\overline{DF}$為高 & (8) $\overline{DG}$為高
(10) △ABD 面積：△ACD 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{AC}$	由(7) 、(8) & (9) & 等高之三角形面積比為底邊長之比
(11) 所以$\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$：$\overline{DC}$	由(5) & (10) 遞移律

在以下的例題 9.1-76 中，我們將利用例題 9.1-43 所證明的結論：**等高之三角形面積比為底邊長之比**。來證明第八章中所提到的**定理 8.1-15：三角形外角平分線定理（三角形外分比定理）**。

例題 9.1-76：　三角形外角平分線定理（三角形外分比定理）

三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

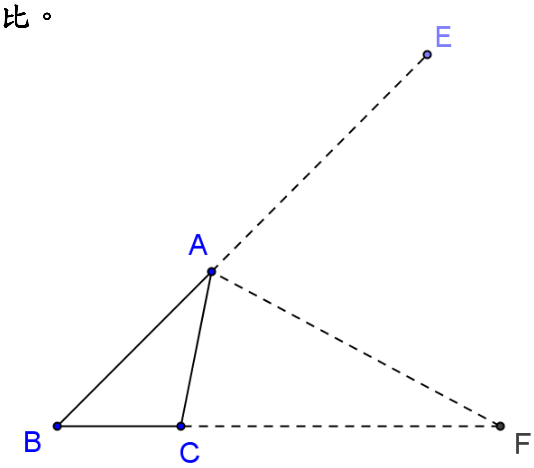


圖 9.1-81

已知：如圖 9.1-81，三角形 ABC 中，∠CAE 為∠BAC 的外角，$\overline{AF}$為∠CAE 的角平分線。

求證：$\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BF}$：$\overline{FC}$

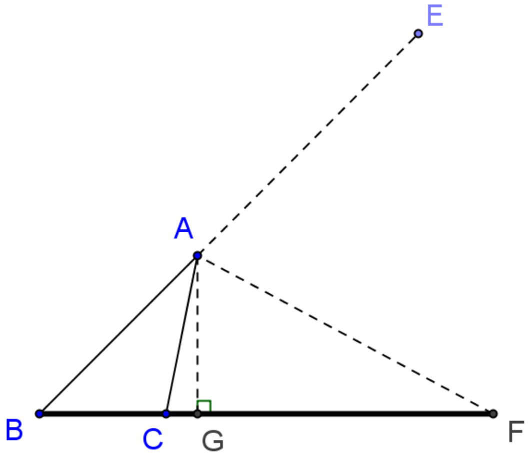


圖 9.1-81(a)

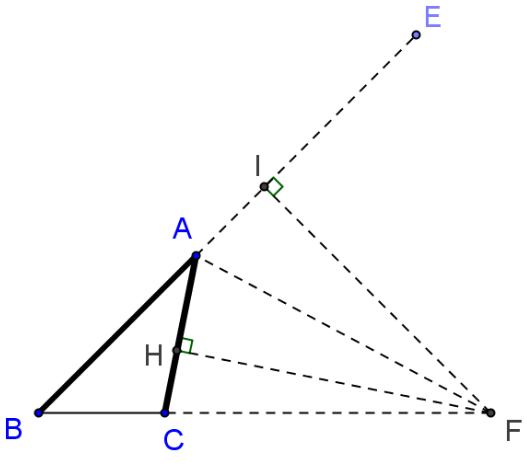


圖 9.1-81(b)

想法：等高之三角形面積比為底邊長之比

證明：

敘述	理由
(1)　過 A 點作$\overline{AG}\perp\overline{BF}$，如圖 9.1-81(a)	作圖
(2)　△ABF 中，$\overline{BF}$為底、$\overline{AG}$為高	由(1) $\overline{AG}\perp\overline{BF}$

(3) △ACF 中，$\overline{FC}$為底、$\overline{AG}$為高	由(1) $\overline{AG}\perp\overline{BF}$
(4) △ABF 與△ACF 等高	由(2) & (3) $\overline{AG}$為高
(5) △ABF 面積：△ACF 面積＝$\overline{BF}$：$\overline{FC}$	由(2) 、(3) & (4) & 等高之三角形面積比為底邊長之比
(6) 過 F 點分別作$\overline{FH}\perp\overline{AC}$、$\overline{FI}\perp\overline{BE}$， 如圖 9.1-81(b)，則$\overline{FH}=\overline{FI}$	作圖 & 已知$\overline{AF}$為∠CAE 的角平分線 & 角平分線上任一點到角的兩邊等距離
(7) △ABF 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{FI}$為高	由(6) $\overline{FI}\perp\overline{BE}$
(8) △ACF 中，$\overline{AC}$為底、$\overline{FH}$為高	由(6) $\overline{FH}\perp\overline{AC}$
(9) △ABF 與△ACF 等高	由(6) $\overline{FH}=\overline{FI}$ & (7) $\overline{FI}$為高 & (8) $\overline{FH}$為高
(10) △ABF 面積：△ACF 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{AC}$	由(7) 、(8) & (9) & 等高之三角形面積比為底邊長之比
(11) 所以$\overline{AB}$：$\overline{AC}=\overline{BF}$：$\overline{FC}$	由(5) & (10) 遞移律

接下來，在例題 9.1-77 與例題 9.1-78 中，我們利用多邊形的面積來證明第八章中的**定理 8.3-1 畢氏定理：直角三角形中，兩直角邊的平方和等於斜邊的平方和。**

例題 9.1-77：

已知：如圖 9.1-82，△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°

求證： $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

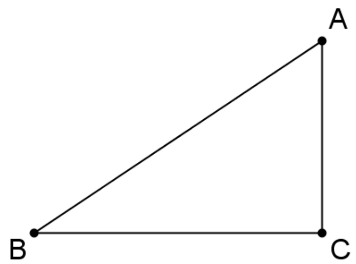


圖 9.1-82

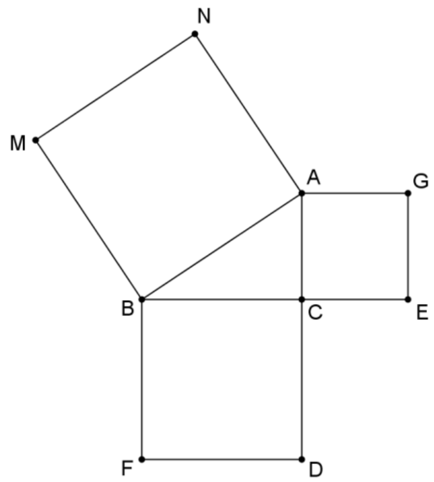


圖 9.1-82(a)

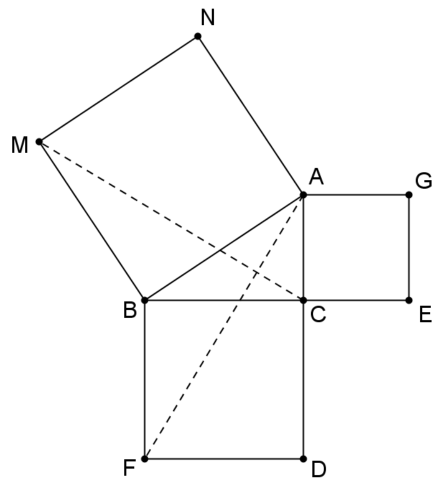


圖 9.1-82(b)

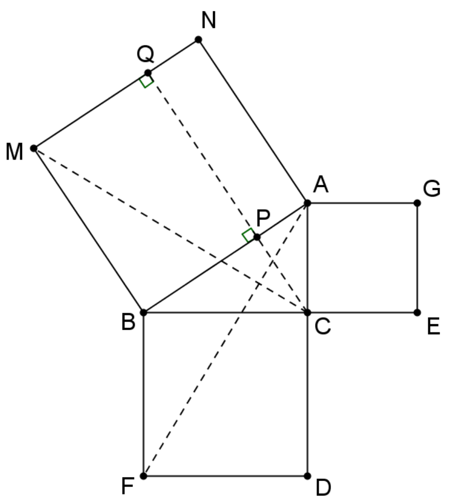


圖 9.1-82(c)

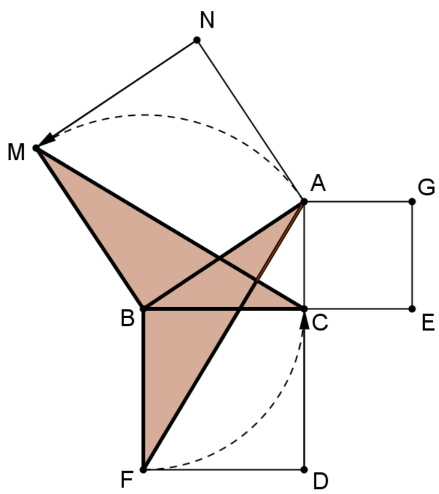


圖 9.1-82(d)

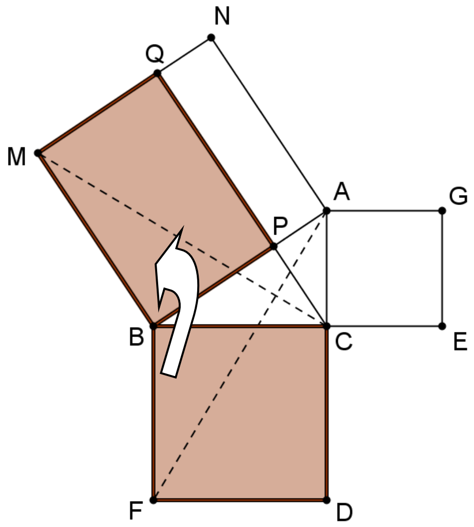


圖 9.1-82(e)

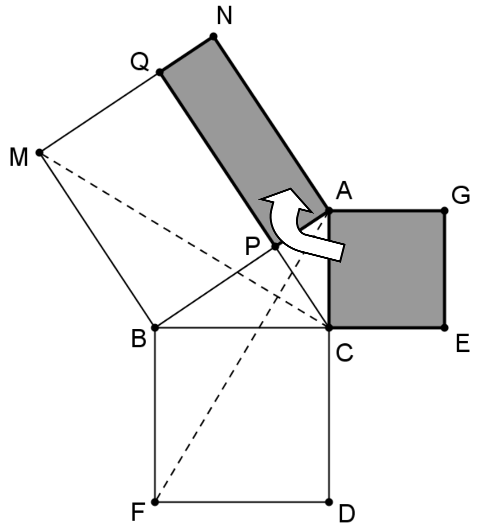


圖 9.1-82(f)

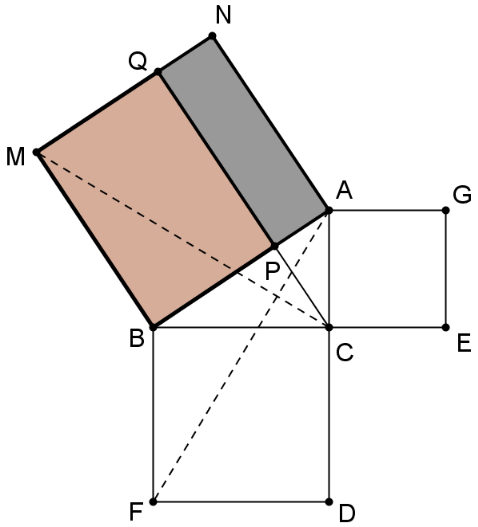


圖 9.1-82(g)

想法：(1) $\overline{AB}^2$ 為以$\overline{AB}$為邊長的正方形面積、$\overline{AC}^2$ 為以$\overline{AC}$為邊長的正方形面積、$\overline{BC}^2$ 為以$\overline{BC}$為邊長的正方形面積

(2) 若能證明以$\overline{AB}$為邊長的正方形面積等於以$\overline{AC}$為邊長的正方形面積和以$\overline{BC}$為邊長的正方形面積之和，即可得$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

證明：

敘述	理由
(1) 分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$為邊長， 作正方形 ABMN、正方形 BCDF、 正方形 ACEG，如圖 9.1-82(a)所示	作圖
(2) 連接$\overline{CM}$、$\overline{AF}$，如圖 9.1-82(b)所示	作圖

(3) 過 C 點作$\overline{CQ}\perp\overline{MN}$交$\overline{AB}$於 Q 點， 如圖 9.1-82(c)所示，則$\overline{CQ}\perp\overline{AB}$	作圖 & 由(1) ABMN 為正方形，則$\overline{AB}\parallel\overline{MN}$， 且$\overline{CQ}\perp\overline{MN}$，故$\overline{CQ}\perp\overline{AB}$
(4) $\angle$ABM＝90°、$\overline{MB}=\overline{AB}$	由(1) ABMN 為正方形
(5) $\angle$CBF＝90°、$\overline{BC}=\overline{BF}$	由(1) BCDF 為正方形
(6) $\angle$ABM＝$\angle$CBF	由(4) $\angle$ABM＝90° & (5) $\angle$CBF＝90°
(7) $\angle$ABM＋$\angle$ABC＝$\angle$CBF＋$\angle$ABC	由(6) 等量加法公理
(8) $\angle$MBC＝$\angle$ABF	由(7) & 全量等於分量之和
(9) 在△MBC 與△ABF 中 $\overline{MB}=\overline{AB}$ $\angle$MBC＝$\angle$ABF $\overline{BC}=\overline{BF}$	如圖 9.1-82(d)所示 由(4) $\overline{MB}=\overline{AB}$ 由(8) $\angle$MBC＝$\angle$ABF 已證 由(5) $\overline{BC}=\overline{BF}$
(10) △MBC $\cong$ △ABF	由(9) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(11) △MBC 面積＝△ABF 面積	由(10)
(12) △ABF 面積＝$\frac{1}{2}\overline{BF}\times\overline{BC}$ $=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$	△ABF 中，以$\overline{BF}$為底、$\overline{BC}$為高 & 三角形面積定理 & 將(5) $\overline{BC}=\overline{BF}$ 代入
(13) △MBC 面積＝$\frac{1}{2}\overline{MB}\times\overline{BP}$	△MBC 中，以$\overline{MB}$為底、$\overline{BP}$為高 & 三角形面積定理
(14) $\frac{1}{2}\overline{MB}\times\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$	由(11)、(12) & (13) 代換
(15) $\overline{MB}\times\overline{BP}=\overline{BC}^2$	由(14) 等量乘法公理
(16) $\angle$ABM＝$\angle$M＝90°	由(1) ABMN 為正方形
(17) $\angle$PQM＝$\angle$BPQ＝90°	由(3) $\overline{CQ}\perp\overline{MN}$ & $\overline{CQ}\perp\overline{AB}$
(18) 四邊形 PQMB 為矩形	由(16) & (17) 四個角都是直角的 四邊形為矩形
(19) 矩形 PQMB 面積＝$\overline{MB}\times\overline{BP}=\overline{BC}^2$ ＝正方形 BCDF 面積，如圖 9.1-82(e)	由(18) & 矩形面積等於長與寬之乘積 & (15) $\overline{MB}\times\overline{BP}=\overline{BC}^2$ 已證
(20) 同理可證： 矩形 APQN 面積＝$\overline{AC}^2$ ＝正方形 ACEG 面積，如圖 9.1-82(f)	重複(1)~(19)步驟 同理可證

(21) 正方形 ABMN 面積＝$\overline{AB}^2$	由(1) 以$\overline{AB}$為邊長作正方形 ABMN ＆正方形面積為邊長的平方
(22) 正方形 ABMN 面積＝矩形 APQN 面積＋矩形 PQMB 面積	如圖 9.1-82(g)所示 全量等於分量之和
(23) 所以$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$	由(19)~(22) 代換

例題 9.1-78：

已知：如圖 9.1-83，△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°

求證： $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

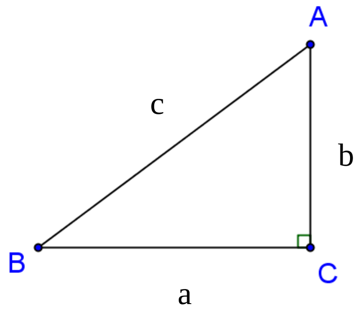


圖 9.1-83

想法： (1) 在代數第四章乘法公式中有提到$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，若再與畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$ 相結合，可得$(a+b)^2=c^2+2ab=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$

(2) $(a+b)^2$ 為以$(a+b)$為邊長之正方形面積、c^2 為以 c 為邊長之正方形面積、$\frac{1}{2}ab$ 為以 ab 為底與高之三角形面積

(3) 若能有一正方形面積為$(a+b)^2$，另有一正方形面積為 c^2，再加上 4 個面積為$\frac{1}{2}ab$ 的三角形；且他們之間的關係符合$(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，即可得畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$。

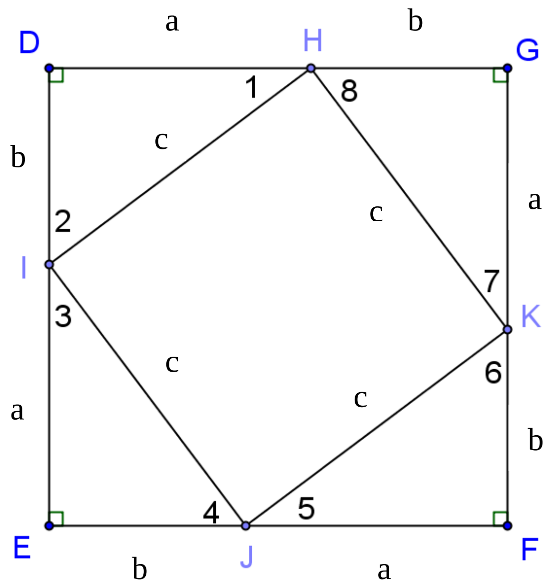


圖 9.1-83(a)

證明：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$	假設
(2) 以(a＋b)為邊長作正方形 DEFG，則$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GD}=(a+b)$、$\angle D=\angle E=\angle F=\angle G=90°$；接著分別在$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GD}$上取點 I、J、K、H，使得$\overline{IE}=\overline{JF}=\overline{KG}=\overline{HD}=a$、$\overline{ID}=\overline{JE}=\overline{KF}=\overline{HG}=b$；最後連接$\overline{IJ}$、$\overline{JK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HI}$，如圖 9.1-83(a)	作圖
(3) 在△DHI 與△GKH 中 $\overline{ID}=\overline{HG}$ $\angle D=\angle G$ $\overline{HD}=\overline{KG}$	如圖 9.1-83(a)所示 由(2) $\overline{ID}=\overline{HG}=b$ 由(2) $\angle D=\angle G=90°$ 由(2) $\overline{KG}=\overline{HD}=a$
(4) △DHI ≅ △GKH	由(3) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(5) $\angle 1=\angle 7$、$\angle 2=\angle 8$ & $\overline{HI}=\overline{KH}$	由(4) & 兩全等三角形對應角相等 & 兩全等三角形對應邊相等
(6) △DHI 中，$\angle 1+\angle 2+\angle D=180°$	如圖 9.1-83(a)所示，三角形三內角和為 180°
(7) $\angle 1+\angle 2=180°-\angle D$ $=180°-90°=90°$	由(6) 等量減法公理 & 由(2) $\angle D=90°$
(8) $\angle 1+\angle 8=90°$	由(7) $\angle 1+\angle 2=90°$ & (5) $\angle 2=\angle 8$ 代換
(9) $\angle 1+\angle 8+\angle IHK=180°$	D、H、G 三點共線 & 平角為 180°
(10) $\angle IHK=180°-(\angle 1+\angle 8)$ $=180°-90°=90°$	由(9) 等量減法公理 & (8) $\angle 1+\angle 8=90°$
(11) 同理可證： $\angle HIJ=90°$ & $\overline{HI}=\overline{IJ}$	重複(3)~(10)步驟 同理可證
(12) 同理可證： $\angle IJK=90°$ & $\overline{IJ}=\overline{JK}$	重複(3)~(10)步驟 同理可證
(13) 同理可證： $\angle JKH=90°$ & $\overline{JK}=\overline{KH}$	重複(3)~(10)步驟 同理可證
(14) 四邊形 HIJK 中， $\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JK}=\overline{KH}$ & $\angle IHK=\angle HIJ=\angle IJK=\angle JKH=90°$	如圖 9.1-83(a)所示 由(5) $\overline{HI}=\overline{KH}$、(10) $\angle IHK=90°$ & (11) & (12) & (13) 已證

(15) 四邊形 HIJK 為正方形	由(14) ＆ 四邊等長且四個內角都為直角的四邊形為正方形
(16) 正方形 DEFG 面積 ＝△DHI 面積＋△EIJ 面積＋△FJK 面積＋△GKH 面積＋正方形 HIJK 面積	如圖 9.1-83(a)所示 全量等於分量之和
(17) $(a+b)^2$ $=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+c^2$	由(16) ＆ 正方形 DEFG 面積＝$(a+b)^2$ ＆ △DHI 面積＝△EIJ 面積＝△FJK 面積＝△GKH 面積＝$\frac{1}{2}ab$ ＆ 正方形 HIJK 面積＝c^2
(18) $a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$	由(17)式展開
(19) $a^2+b^2=c^2$	由(18) 等量減法公理
(20) 所以$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$	由(1) 假設 ＆ (19) $a^2+b^2=c^2$

習題 9.1

習題 9.1-1：

如圖 9.1-84，ABCD 為矩形，$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{AD}$＝8 公分，則矩形 ABCD 的面積為何？

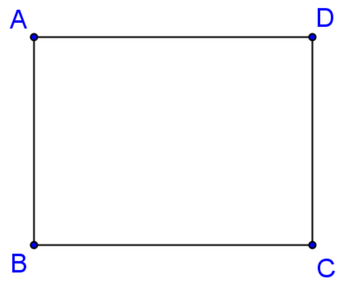


圖 9.1-84

習題 9.1-2：

如圖 9.1-85，已知正方形 ABCD 面積為 25 平方公分，則$\overline{AB}$＝？

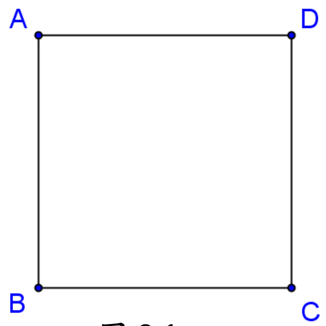


圖 9.1-85

習題 9.1-3：

如圖 9.1-86，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且$\overline{BC}$＝10 公分，$\overline{CE}$＝6 公分，則平行四邊形 ABCD 面積為？

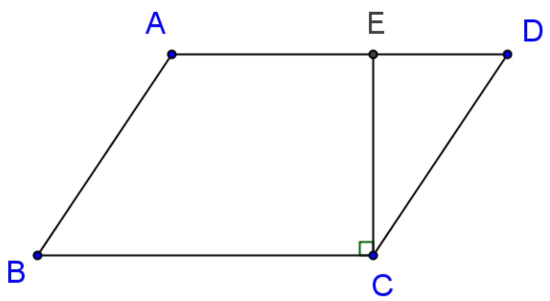


圖 9.1-86

習題 9.1-4：

如圖 9.1-87，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形， $\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且平行四邊形 ABCD 面積＝80 平方公分，$\overline{BC}$＝10 公分，則$\overline{CE}$＝？

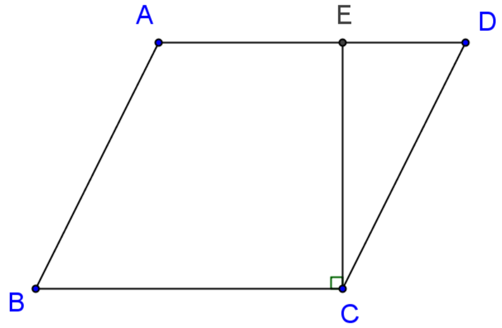


圖 9.1-87

習題 9.1-5：

如圖 9.1-88，平行四邊形 ABCD 的周長為 20 公分，$\overline{AE}\perp\overline{CD}$，若$\overline{AD}$=4 公分，$\overline{AE}$=3 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

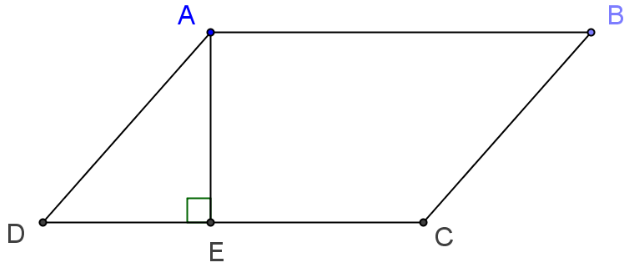


圖 9.1-88

習題 9.1-6：

有一長方形與一平行四邊形等面積，已知長方形之長為 9 公尺，寬為 8 公尺，平形四邊形之底長為 12 公尺，試求此平行四邊形之高為多少？

習題 9.1-7：

如圖 9.1-89，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝14 公分，$\overline{AD}$＝8 公分，則△ABC 面積為何？

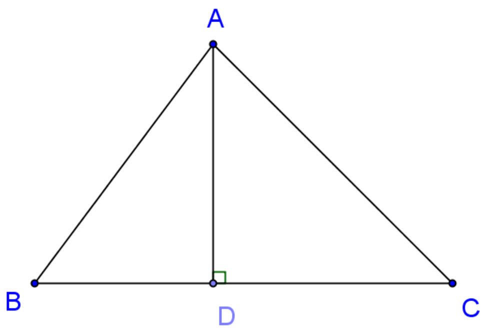


圖 9.1-89

習題 9.1-8：

如圖 9.1-90，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝8 公分，$\overline{AD}$＝10 公分，則△ABC 面積為何？

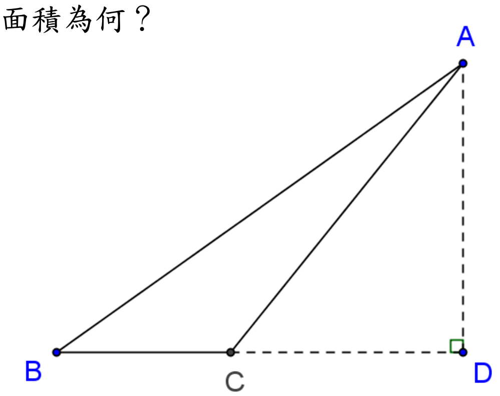


圖 9.1-90

習題 9.1-9：

如圖 9.1-91，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝12 公分，△ABC 面積為 48 平方公分，則$\overline{AD}$＝？

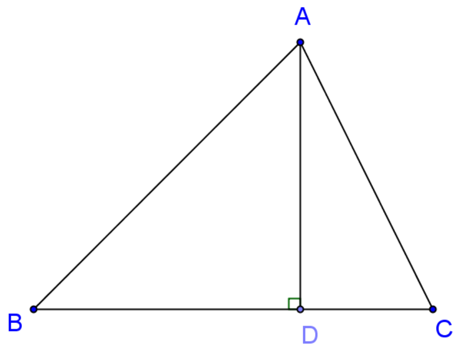


圖 9.1-91

習題 9.1-10：

如圖 9.1-92，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠A＝60°，∠C＝90°，且$\overline{AB}$＝12 公分，則△ABC 面積為何？

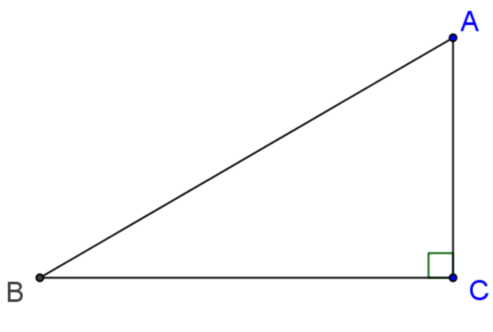


圖 9.1-92

習題 9.1-11：

如圖 9.1-93，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠C＝60°，∠CAB＝90°，且$\overline{AM}\perp\overline{BC}$，$\overline{AM}$＝6 公分，則△ABC 面積為何？

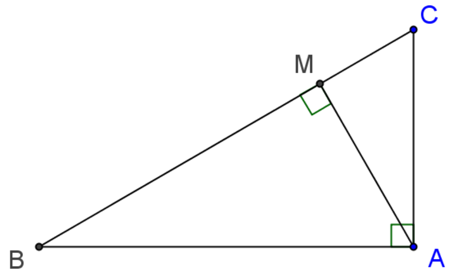


圖 9.1-93

習題 9.1-12：

如圖 9.1-94，已知△ABC 為等腰直角三角形，若$\overline{AB}$＝12 公分，則△ABC 面積為何？

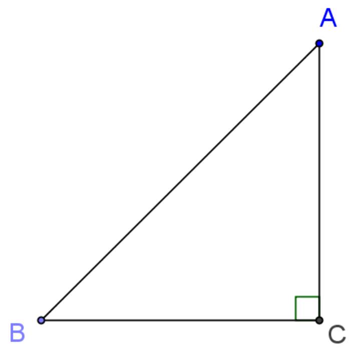


圖 9.1-94

習題 9.1-13：

如圖 9.1-95，已知△ABC 為等腰直角三角形， ∠C＝90°，若△ABC 面積為 32 平方公分，則$\overline{AB}$＝？

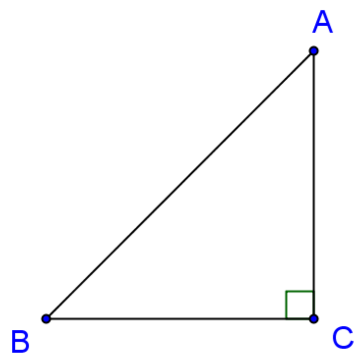


圖 9.1-95

習題 9.1-14：

有一個正三角形的邊長為 4 公分，則此正三角形的面積為________。

習題 9.1-15：

若一正三角形的面積為 $25\sqrt{3}$ 平方公分，則此正三角形的邊長為______。

習題 9.1-16：

如圖 9.1-96，已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，若$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BC}$＝8 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CE}$，則$\overline{CE}$＝？

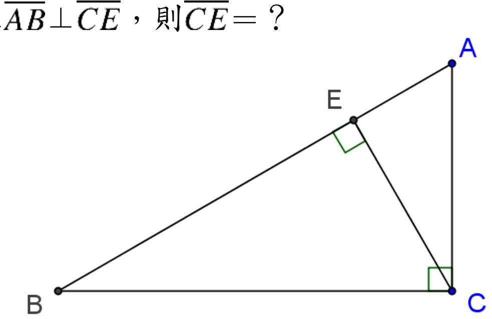


圖 9.1-96

習題 9.1-17：

如圖 9.1-97，已知△ABC 為直角三角形，∠B＝30°，∠ACB＝90°，∠A＝60°，若$\overline{AC}$＝5 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

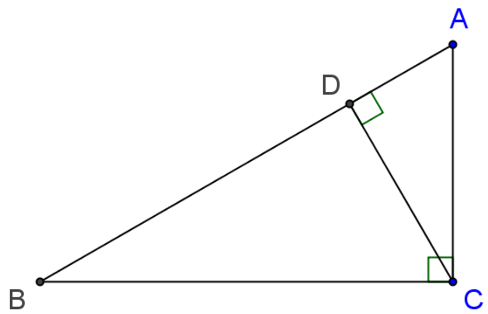


圖 9.1-97

習題 9.1-18：

如圖 9.1-98，已知△ABC 為等腰直角三角形，∠ACB＝90°，若△ABC 面積為 32 平方公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

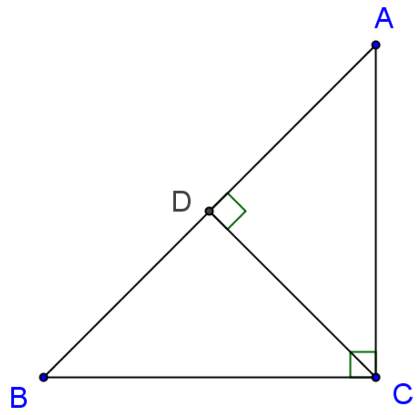


圖 9.1-98

習題 9.1-19：

如圖 9.1-99，已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若$\overline{AC}$＝2 公分，$\overline{BD}$＝5 公分，則菱形 ABCD 面積為何？

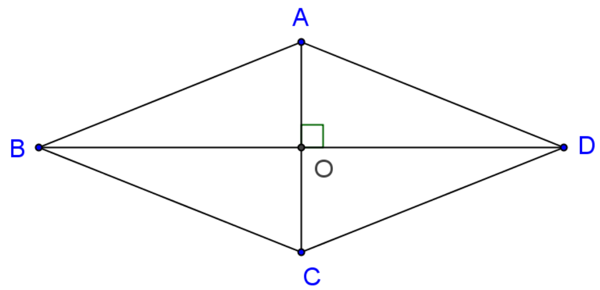


圖 9.1-99

習題 9.1-20：

如圖 9.1-100，已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若鳶形 ABCD 面積＝16 平方公分，$\overline{AC}$＝4 公分，則$\overline{BD}$＝？

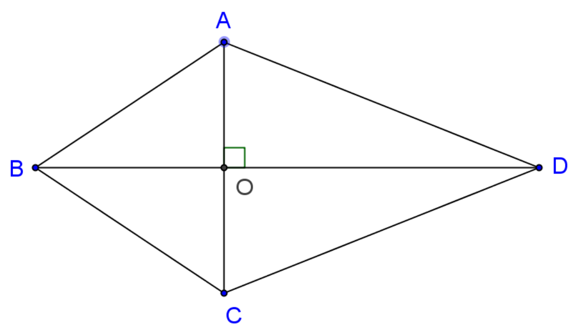


圖 9.1-100

習題 9.1-21：

如圖 9.1-101，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上的高，又$\overline{CD}$=5 公分，$\overline{BC}$=4 公分，$\overline{AF}$=3 公分，求$\overline{AE}$。

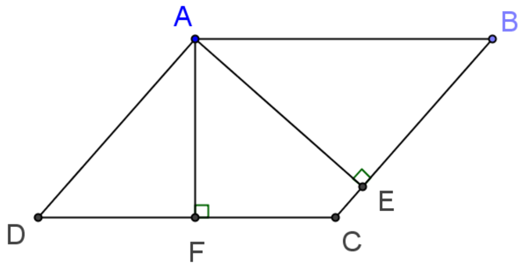


圖 9.1-101

習題 9.1-22：

如圖 9.1-102，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$為對角線，△ABC 的面積為 8 平方公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

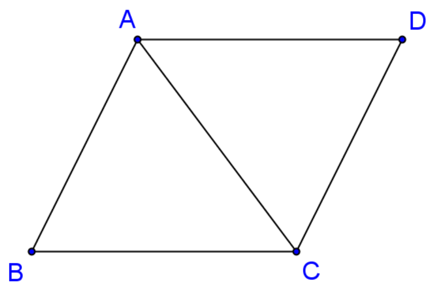


圖 9.1-102

習題 9.1-23：

如圖 9.1-103，四邊形 ABCD 為長方形，四邊形 BCED 為平行四邊形，若△BCD 的面積為 3 平方單位，求四邊形 ABCE 的面積。

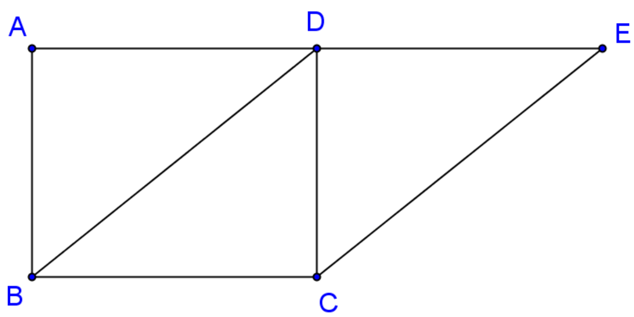


圖 9.1-103

習題 9.1-24：

如圖 9.1-104，平行四邊形 ABCD 的面積為 36 平方公分，$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{GH} \parallel \overline{AD}$，求四邊形 EGFH 的面積。

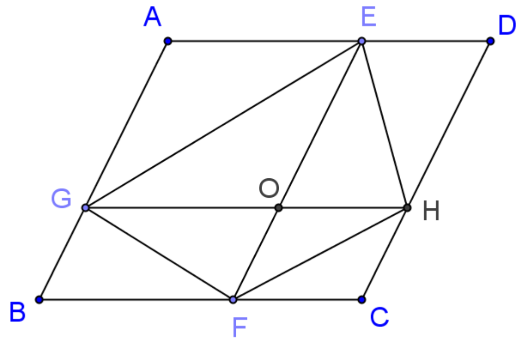


圖 9.1-104

習題 9.1-25：

如圖 9.1-105，長方形 ABCD 中，$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，E 點落在$\overline{CD}$上，求灰色區域的面積。

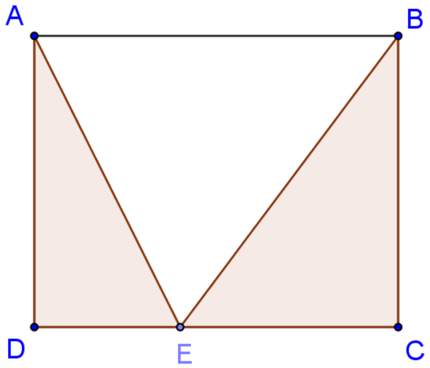


圖 9.1-105

習題 9.1-26：

如圖 9.1-106，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$＝4 公分，$\overline{DE}$＝3 公分，∠AED＝90°，求四邊形 ABCD 的面積。

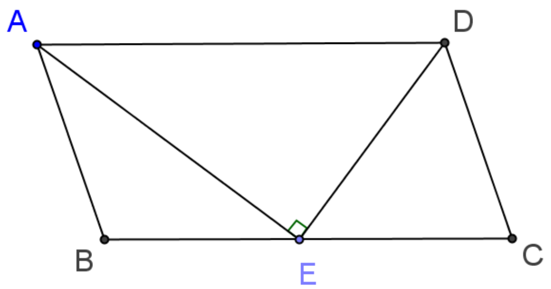


圖 9.1-106

習題 9.1-27：

如圖 9.1-107，已知 L || M，四邊形 EFHG 與 IFHJ 皆為平行四邊形，若四邊形 EFHG 面積為 12 平方公分，則四邊形 IFHJ 面積為何？

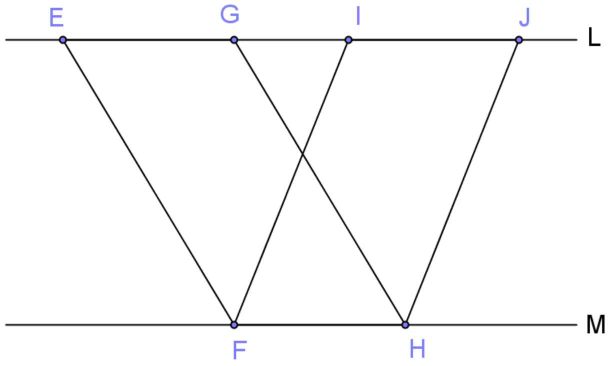


圖 9.1-107

習題 9.1-28：

如圖 9.1-108，已知 L || M，若△EFH 面積為 8 平方公分，則：

(1) △EFG 面積為何？　　(2) △EFI 面積為何？

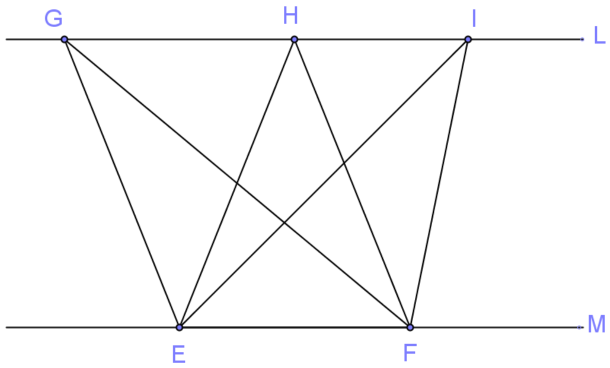


圖 9.1-108

習題 9.1-29：

如圖 9.1-109，已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝3：4，若△ABD 面積為 9 平方公分，則△ACD 面積為何？

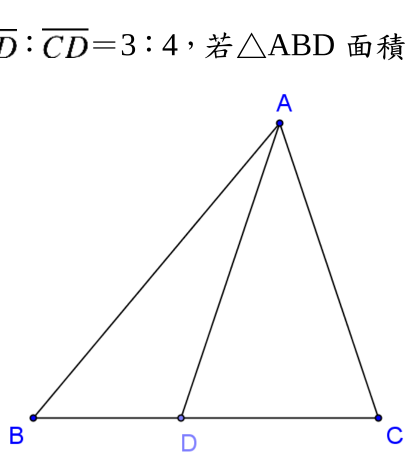


圖 9.1-109

習題 9.1-30：

如圖 9.1-110，已知 L || M，$\overline{EF}$：$\overline{HI}$＝3：4，若△EFG 面積為 9 平方公分，則△HIJ 的面積為何？

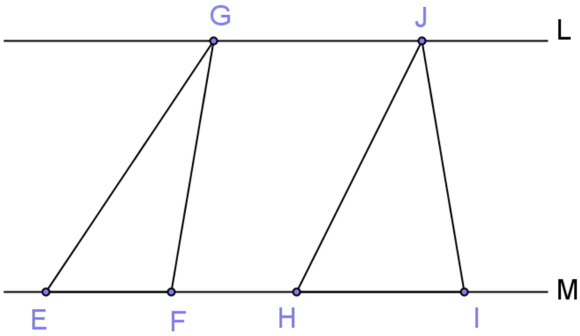


圖 9.1-110

習題 9.1-31：

如圖 9.1-111，$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為△ABC 的三中線，G 點為△ABC 的重心，已知△ABC 面積為 42 平方公分，求：

(1) △AGD 面積為何？

(2) △BGC 面積為何？

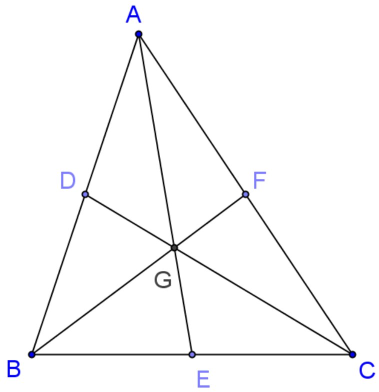


圖 9.1-111

習題 9.1-32：

如圖 9.1-112，四邊形 ABCD 為平行四邊形，E 點為$\overline{AB}$中點，$\overline{BD}$與$\overline{CE}$相交於 F 點，若△BFC 面積為 5 平方公分，則平行四邊形 ABCD 面積為何？

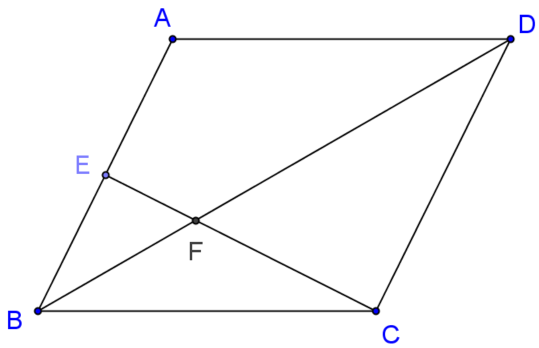


圖 9.1-112

習題 9.1-33：

如圖 9.1-113，I 為直角三角形 ABC 的內心，若∠A＝90°，且$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分，已知△AIC 的面積為 5 平方公分，試求△BIC 的面積。

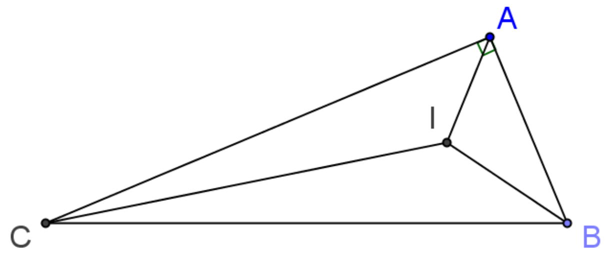


圖 9.1-113

習題 9.1-34：

如圖 9.1-114，E 點為四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點，已知△ADE 面積為 3 平方公分，△BCE 面積為 2 平方公分，△ABE 面積為 4 平方公分，則△CDE 面積為何？

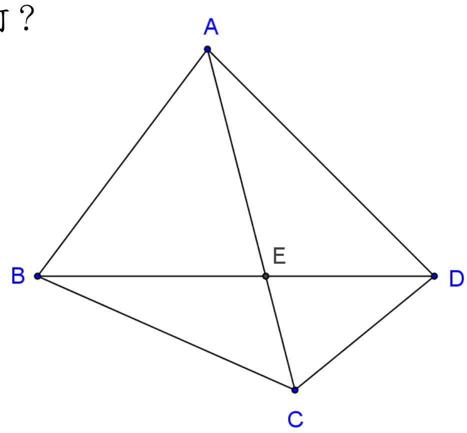


圖 9.1-114

習題 9.1-35：

如圖 9.1-115，梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ADE 面積為 5 平方公分，△BCE 面積為 20 平方公分，求△ABE 面積與△DCE 面積各為何？

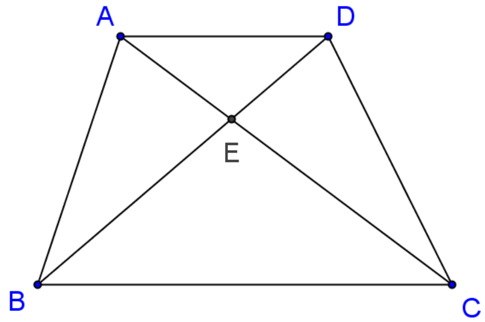


圖 9.1-115

習題 9.1-36：

如圖 9.1-116，四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ABE 面積為 8 平方公分，則 ABCD 面積為何？

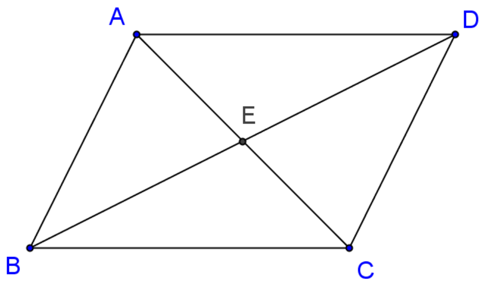


圖 9.1-116

習題 9.1-37：

如圖 9.1-117，平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 O 點，若$\overline{OE}\perp\overline{CD}$，$\overline{OE}=2$ 公分，$\overline{BC}=6$ 公分，且平行四邊形 ABCD 的周長為 28 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

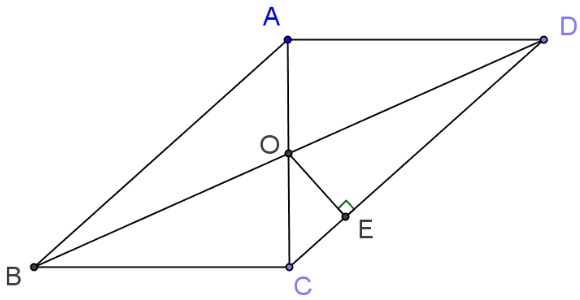


圖 9.1-117

習題 9.1-38：

如圖 9.1-118，平行四邊形 ABCD 與 CDEF 中，P、Q 分別為其對角線交點，已知四邊形 CPDQ 面積為 10 平方公分，△CQF 面積為 4 平方公分，求四邊形 ABCD 的面積。

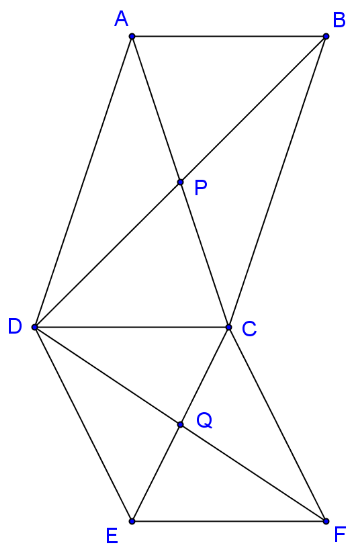


圖 9.1-118

習題 9.1-39：

如圖 9.1-119，已知△ABC 中，$\overline{AB}$＝2 公分、$\overline{BC}$＝3 公分、$\overline{AC}$＝4 公分，則△ABC 的面積為何？

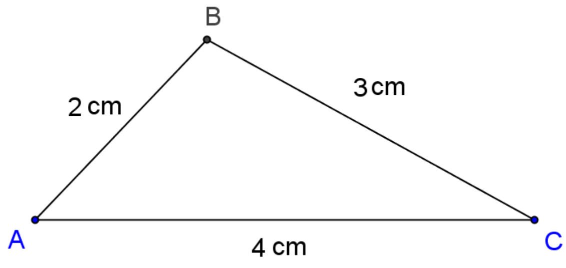


圖 9.1-119

習題 9.1-40：

如圖 9.1-120，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝14 公分，$\overline{BE}$＝8 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

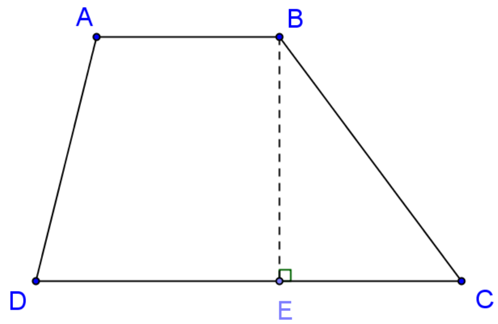


圖 9.1-120

習題 9.1-41：

如圖 9.1-121，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BE}$＝10 公分，若梯形 ABCD 面積為 140 平方公分，則$\overline{CD}$＝？

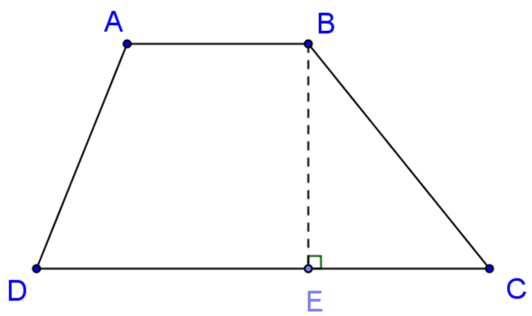


圖 9.1-121

習題 9.1-42：

如圖 9.1-122，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝18 公分，若$\overline{BC}$＝10 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

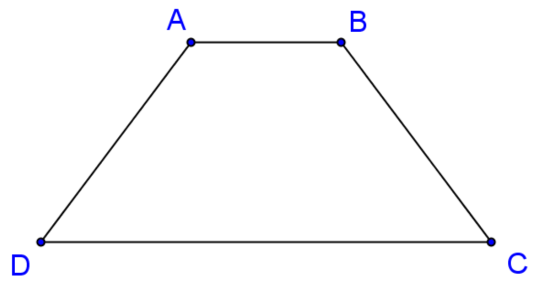


圖 9.1-122

習題 9.1-43：

如圖 9.1-123，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，若$\overline{AD}$＝7 公分，$\overline{BC}$＝25 公分，$\overline{AB}$＝15 公分，求梯形 ABCD 的面積。

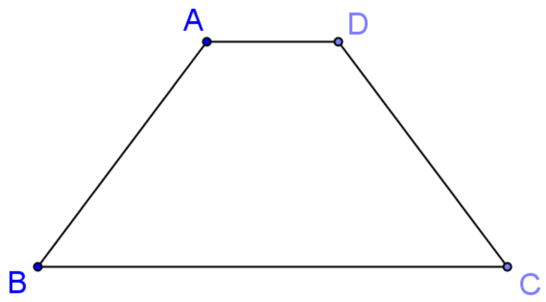


圖 9.1-123

習題 9.1-44：

如圖 9.1-124，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，已知$\overline{EF}$＝22 公分，$\overline{AG}$＝16 公分，求梯形 ABCD 的面積。

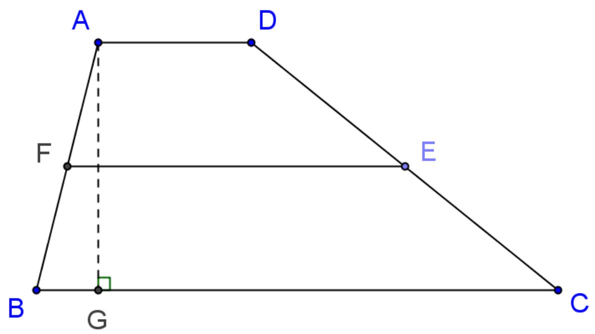


圖 9.1-124

習題 9.1-45：

如圖 9.1-125，已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，若$\overline{AG}$＝2 公分，且梯形 ABCD 的面積為 8 平方公分，求$\overline{EF}$＝？

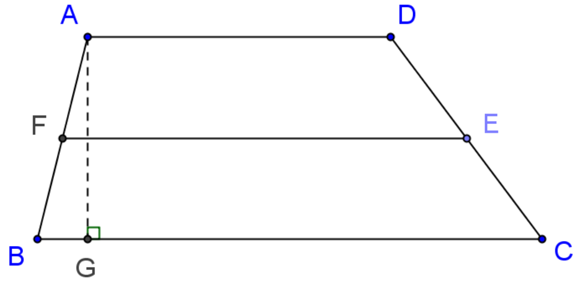


圖 9.1-125

習題 9.1-46：

如圖 9.1-126，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{AD}$＝4 公分，$\overline{A'D'}$＝3 公分，則$\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta A'B'C'\text{面積}}$為何？

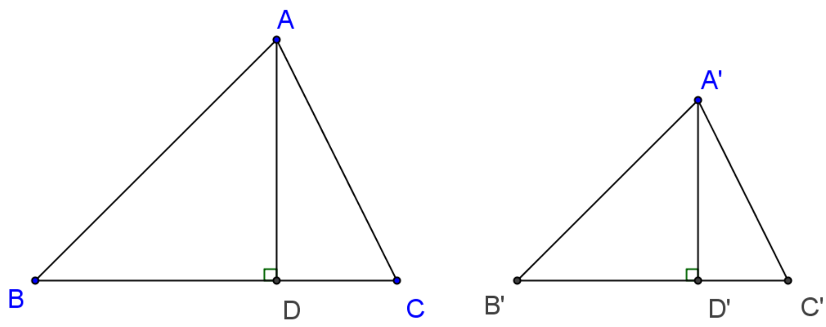


圖 9.1-126

習題 9.1-47：

如圖 9.1-127，六邊形 ABCDEF 與六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，已知$\overline{AB}$＝3 公分、$\overline{A_1B_1}$＝2 公分，若六邊形 ABCDEF 面積為 21 平方公分，則六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為何？

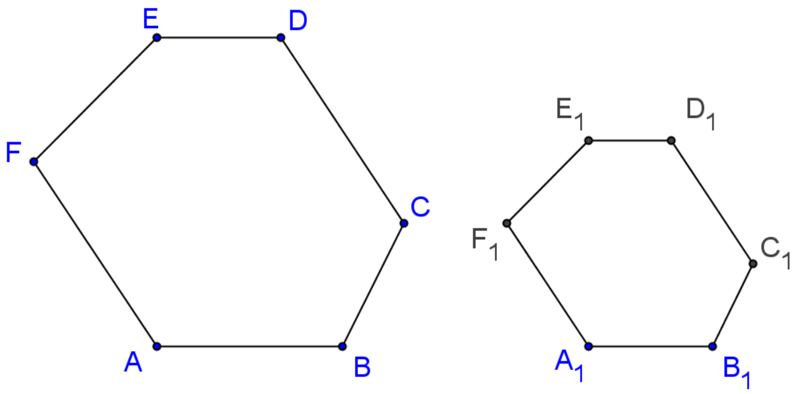


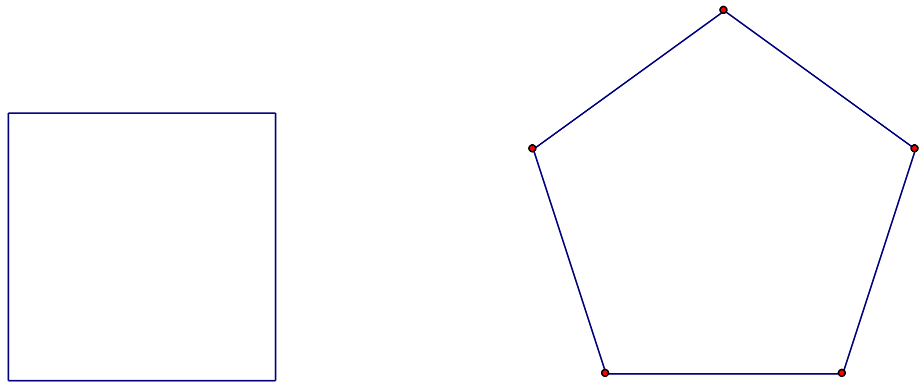
圖 9.1-127

9.2 節　正多邊形與圓形的面積及周長

定義 9.2-1 正多邊形

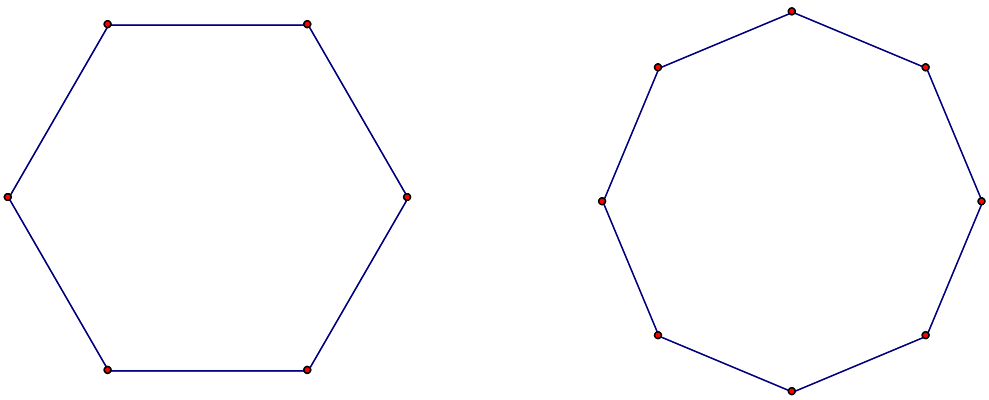
正多邊形的每一邊相等且每一角相等。

如圖 9.2-1 中左圖為正四邊形，右圖為正五邊形，圖 9.2-2 的左圖為正六邊形，右圖為正八邊形。



正四邊形　　　　正五邊形

圖 9.2-1



正六邊形　　　　正八邊形

圖 9.2-2

定理 9.2-1 正多邊形外接圓定理

任何邊數的正多邊形必有一外接圓。

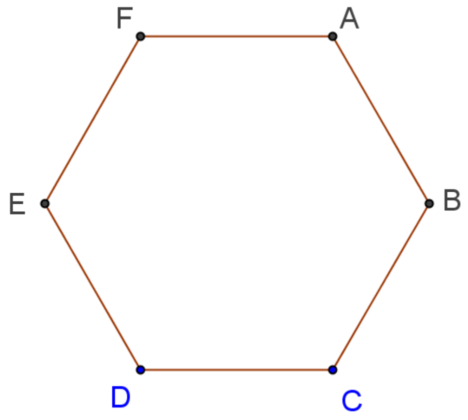


圖 9.2-3

已知： 如圖 9.2-3，ABCDEF 為正多邊形

求證： 正多邊形 ABCDEF 必有一外接圓

想法： 作過 A、B、C 三點的圓，圓心 O，則$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$等於圓的半徑，若能證得$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$等於圓的半徑，則以 O 為圓心，以$\overline{OA}$為半徑的圓必過正多邊形的頂點 ABCDEF

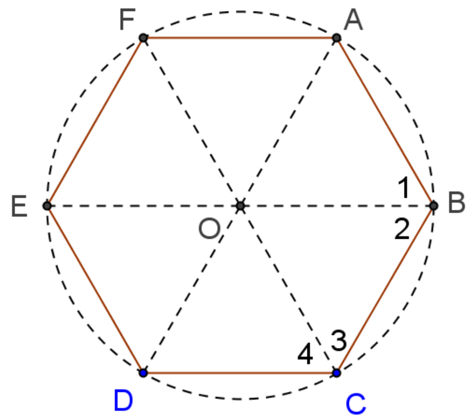


圖 9.2- 3(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作過 A、B、C 三點的圓，圓心為 O 點，連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$，其中$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，如圖 9.2-3(a)所示	過不在同一直線上的三點可作一圓，過兩點可作一線段 同圓的半徑相等

(2) $\angle ABC = \angle BCD$ & $\overline{AB} = \overline{DC}$ (即$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$)	已知 ABCDEF 為正多邊形 & 正多邊形的每一邊相等且每一角相等
(3) △OBC 為等腰三角形	由(1) $\overline{OB} = \overline{OC}$ & 等腰三角形定義
(4) $\angle 2 = \angle 3$	由(3) & 等腰三角形的兩底角相等
(5) $\angle 1 = \angle 4$	由(2) & (4) 等量減等量其差相等
(6) 在△OAB 與△ODC 中 $\overline{AB} = \overline{DC}$ $\angle 1 = \angle 4$ $\overline{OB} = \overline{OC}$	如圖 9.2-3(a)所示 由(2) $\overline{AB} = \overline{DC}$ 由(5) $\angle 1 = \angle 4$ 已證 由(1) $\overline{OB} = \overline{OC}$
(7) △OAB ≅ △ODC	由(6) & 根據 S.A.S. 三角形全等定理
(8) $\overline{OA} = \overline{OD}$	由(7) & 兩全等三角形對應邊相等
(9) 所以 D 點在圓 O 的圓周上	由(8) & 與圓心的距離等於半徑的點必在圓周上
(10) 同理可證： 圓 O 過其他正多邊形的各頂點	同(2)~(9) 同理可證
(11) 故正多邊形必有一外接圓	由(9) & (10) 正多邊形的各頂點皆在圓周上

Q. E. D.

定理 9.2-2 正多邊形內切圓定理

任何邊數的正多邊形必有一內切圓。

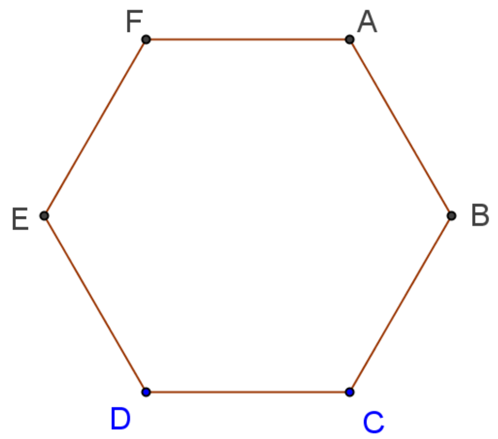


圖 9.2.4

已知：如圖 9.2-4，ABCDEF 為正多邊形

求證：正多邊形 ABCDEF 必有一內切圓

想法：證明正多邊形的各邊與內切圓的圓心等距離

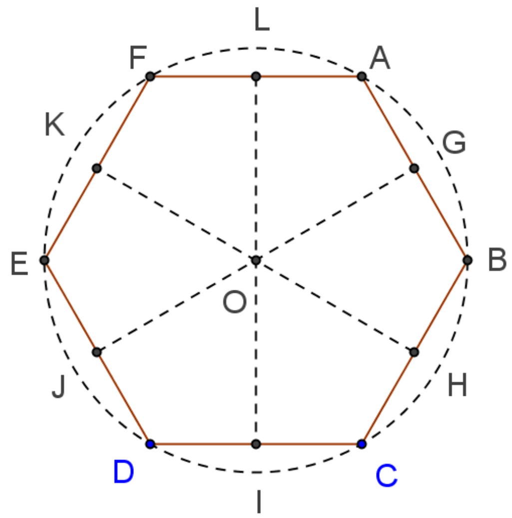


圖 9.2-4(a)

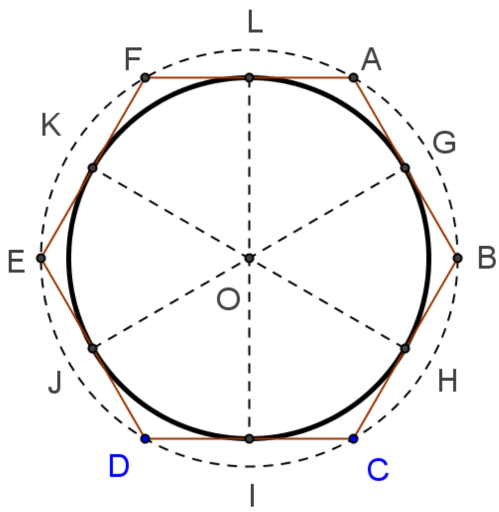


圖 9.2-4(b)

證明：

敘述	理由
(1) 作正多邊形 ABCDEF 的外接圓，設圓心為 O 點，則$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$皆為圓 O 上之弦； 再由圓心作各邊的垂直線，則$\overline{OG}$、$\overline{OH}$、$\overline{OI}$、$\overline{OJ}$、$\overline{OK}$、$\overline{OL}$分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$之弦心距，如圖 9.2-4(a)所示	正多邊形的外接圓定理 圓周上兩點連線為此圓之弦 垂直線作圖 圓心到弦的垂直線段為弦心距
(2) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}$	已知 ABCDEF 為正多邊形 & 正多邊形的每一邊相等
(3) $\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=\overline{OL}$	由(2) & (1) $\overline{OG}$、$\overline{OH}$、$\overline{OI}$、$\overline{OJ}$、$\overline{OK}$、$\overline{OL}$分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$之弦心距 & 等弦之弦心距等長
(4) 以 O 為圓心，$\overline{OG}$為半徑作圓，如上圖 9.2-4(b)所示	圓的作圖
(5) 此圓必過 G、H、I、J、K、L	由(4) & (3) $\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=\overline{OL}$皆為圓之半徑
(6) 多邊形的各邊都與圓 O 相切於一點，分別為 G、H、I、J、K、L (即正多邊形各邊與圓 O 相切)	由(5) & 與圓相交於一點的直線為圓的切線
(7) 故正多邊形必有一內切圓	由(6) 已證

Q. E. D.

定義 9.2-2 正多邊形的中心

正多邊形外接圓或內切圓的圓心，叫做此正多邊形的中心。

如圖 9.2-5，O 點為此正六邊形 ABCDEF 的中心。

定義 9.2-3 正多邊形的半徑(頂心距)

正多邊形外接圓的半徑，叫做此正多邊形的半徑也叫做頂心距。

如圖 9.2-5，$\overline{OA}$為正六邊形 ABCDEF 的半徑(頂心距)。

定義 9.2-4 正多邊形的中心角

正多邊形一邊兩端點與兩半徑所成的夾角，叫做此正多邊形的中心角。

如圖 9.2-5，∠COD 為正六邊形 ABCDEF 的中心角。

定義 9.2-5 正多邊形的邊心距

正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距。

如圖 9.2-5，$\overline{OL}$為正六邊形 ABCDEF 的邊心距。

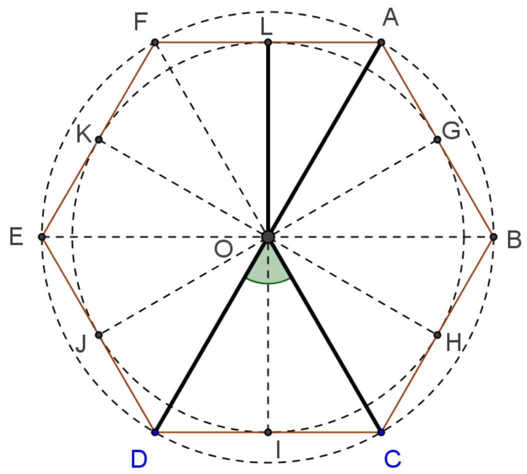


圖 9.2-5

定理 9.2-3 正多邊形面積定理

正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半。

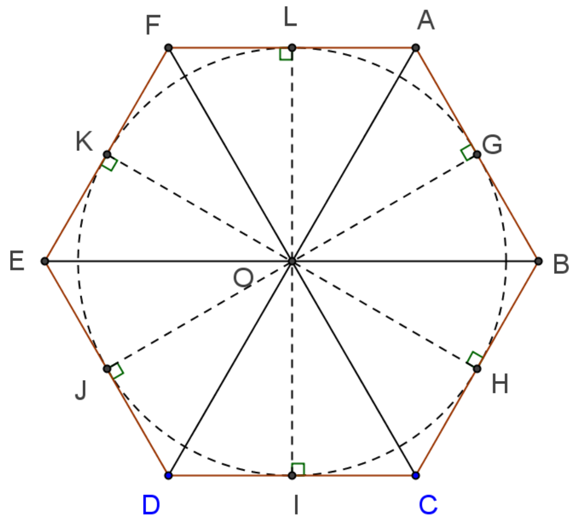


圖 9.2-6

已知：如圖 9.2-6，ABCDEF 為正多邊形， O 點為其中心，
$\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=\overline{OL}$為其邊心距。

求證：正多邊形 ABCDEF 面積$=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA})\times\overline{OG}}{2}$。

想法：將多邊形分為 n 個全等的三角形，求三角形的面積。

證明：

敘述	理由
(1) 圓 O 為此正多邊形內切圓，其中 $\overline{OG}\perp\overline{AB}$、$\overline{OH}\perp\overline{BC}$、$\overline{OI}\perp\overline{CD}$、$\overline{OJ}\perp\overline{DE}$、$\overline{OK}\perp\overline{EF}$、$\overline{OL}\perp\overline{FA}$	已知 ABCDEF 為正多邊形， O 點為其中心，$\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=\overline{OL}$為其邊心距
(2) △OAB 中，$\overline{AB}$為底、$\overline{OG}$為高 △OAB$=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OG}}{2}$	由(1) $\overline{OG}\perp\overline{AB}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(3) △OBC 中，$\overline{BC}$為底、$\overline{OH}$為高 △OBC$=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{OH}}{2}$	由(1) $\overline{OH}\perp\overline{BC}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半

(4) △OCD 中，$\overline{CD}$為底、$\overline{OI}$為高 △OCD＝$\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OI}}{2}$	由(1) $\overline{OI}\perp\overline{CD}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(5) △ODE 中，$\overline{DE}$為底、$\overline{OJ}$為高 △ODE＝$\dfrac{\overline{DE}\times\overline{OJ}}{2}$	由(1) $\overline{OJ}\perp\overline{DE}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(6) △OEF 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{OK}$為高 △OEF＝$\dfrac{\overline{EF}\times\overline{OK}}{2}$	由(1) $\overline{OK}\perp\overline{EF}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(7) △OFA 中，$\overline{FA}$為底、$\overline{OL}$為高 △OFA＝$\dfrac{\overline{FA}\times\overline{OL}}{2}$	由(1) $\overline{OL}\perp\overline{FA}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半
(8) 多邊形 ABCDEF 的面積 ＝△OAB＋△OBC＋△OCD＋ △ODE＋△OEF＋△OFA	如圖 9.2-6 所示 全量等於分量之和
(9) 多邊形 ABCDEF 的面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{BC}\times\overline{OH}}{2}+\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OI}}{2}+\dfrac{\overline{DE}\times\overline{OJ}}{2}+\dfrac{\overline{EF}\times\overline{OK}}{2}+\dfrac{\overline{FA}\times\overline{OL}}{2}$	將(2)~(7)代入(8)得
$=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{BC}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{DE}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{EF}\times\overline{OG}}{2}+\dfrac{\overline{FA}\times\overline{OG}}{2}$	將已知$\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=\overline{OL}$ 代入
$=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA})\times\overline{OG}}{2}$	分配律，提出$\overline{OG}$
(10) 所以正多邊形 ABCDEF 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA})\times\overline{OG}}{2}$	由(9)　已證

Q. E. D.

例題 9.2-1

如圖 9.2-7，ABCDEF 為邊長為 2 公分的正六邊形，O 點為其中心，已知此正六邊形內切圓半徑為 $\sqrt{3}$ 公分，求正六邊形 ABCDEF 面積為何？

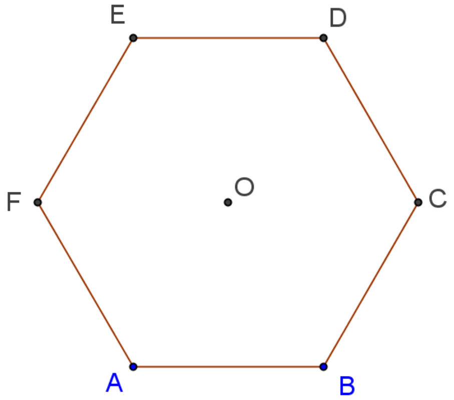


圖 9.2-7

想法：正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半

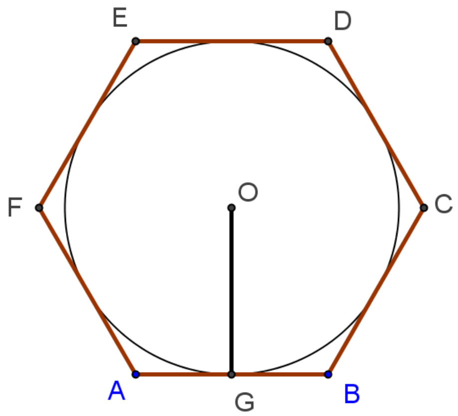


圖 9.2-7(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，作正六邊形 ABCDEF 的內切圓， 圓 O 與 $\overline{AB}$ 相切於 G 點， 連接 $\overline{OG}$，如圖 9.2-7(a)所示， 則 $\overline{OG}$ 為正六邊形之邊心距	正多邊形內切圓的圓心為此正多邊形的中心 & 正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距
(2) $\overline{OG}=\sqrt{3}$ 公分	由(1) $\overline{OG}$ 為正六邊形之邊心距 & 已知此正六邊形內切圓半徑為 $\sqrt{3}$ 公分
(3) 正六邊形 ABCDEF 周長 $=6\times\overline{AB}=6\times(2$ 公分$)=12$ 公分	正多邊形各邊長相等 & 已知 ABCDEF 為邊長為 2 公分的正六邊形

(4) 正六邊形 ABCDEF 面積 $=\dfrac{(12\text{公分})\times(\sqrt{3}\text{公分})}{2}$ $=6\sqrt{3}$ 平方公分	正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半 & (3) 正六邊形 ABCDEF 周長＝12 公分 & (2) 邊心距 $\overline{OG}=\sqrt{3}$ 公分

例題 9.2-2

若 ABCDEFGH 為一邊長 2 公分、面積 64 平方公分的正八邊形，求此正八邊形內切圓半徑為何？

想法：(1) 正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半

(2) 正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距

解：

敘述	理由
(1) 正八邊形 ABCDEFGH 周長 ＝8×(2 公分)＝16 公分	正多邊形各邊長相等 & 已知 ABCDEFGH 為邊長為 2 公分的正八邊形
(2) 64 平方公分 $=\dfrac{(16\text{公分})\times\text{正八邊形邊心距}}{2}$	正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半 & 已知 ABCDEFGH 為面積為 64 平方公分的正八邊形 & (1) 正八邊形 ABCDEFGH 周長＝16 公分
(3) (16 公分)×正八邊形邊心距 ＝(64 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4) 正八邊形邊心距 ＝(64 平方公分)×2÷(16 公分) ＝8 公分	由(3) 等量除法公理
(5) 正八邊形內切圓半徑＝8 公分	正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距 & (3) 正八邊形邊心距＝8 公分 已證

定理 9.2-4 正多邊形相似定理

兩個邊數相等的正多邊形必相似。

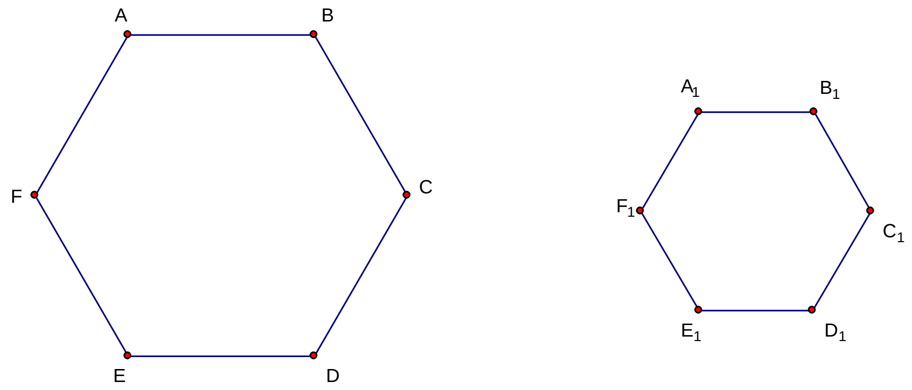


圖 9.2-8

已知：如圖 9.2-8，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為相同邊數的正 n 多邊形。
求證： ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似。

想法： 證明兩正 n 多邊形的對應角相等，對應邊的比相等。

證明：

敘述	理由
(1) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = (n-2)\times 180°\div n$	已知 ABCDEF 為正 n 多邊形 & 正 n 多邊形每個內角皆為 $(n-2)\times 180°\div n$ **(例題 6.4-9)**
(2) $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1 = \angle E_1 = \angle F_1 = (n-2)\times 180°\div n$	已知 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為正 n 多邊形 & 正 n 多邊形每個內角皆為 $(n-2)\times 180°\div n$ **(例題 6.4-9)**
(3) $\angle A = \angle A_1$、$\angle B = \angle B_1$、$\angle C = \angle C_1$、$\angle D = \angle D_1$、$\angle E = \angle E_1$、$\angle F = \angle F_1$	由(1) & (2)
(4) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$	已知 ABCDEF 為正 n 多邊形
(5) $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{D_1E_1} = \overline{E_1F_1} = \overline{F_1A_1}$	已知 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為正 n 多邊形
(6) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{E_1F_1}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{F_1A_1}}$	由(4) & (5) 等量除等量其商相等
(7) 所以 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似	由(3) & (6) 對應角相等，對應邊的比相等的兩正 n 多邊形相似

Q. E. D.

定理 9.2-5 正多邊形周長比定理

兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比。

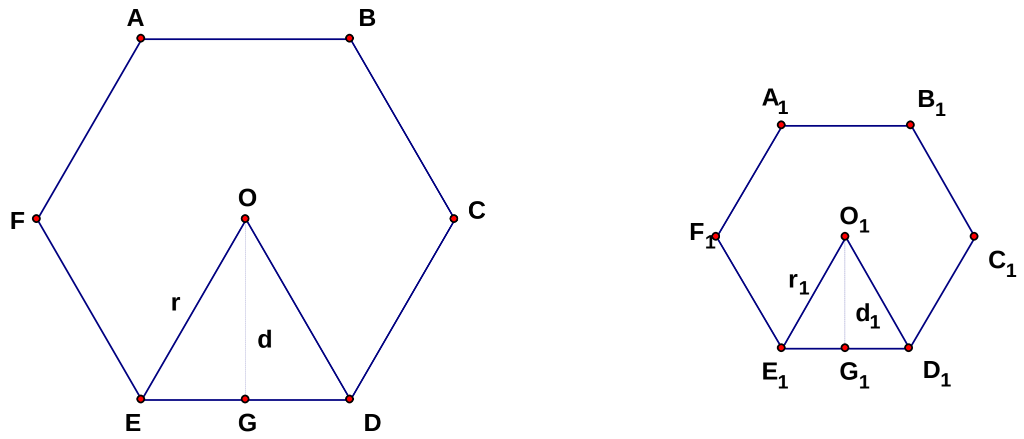


圖 9.2-9

已知： 如圖 9.2-9，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為相同邊數的正 n 多邊形，正 n 多邊形 ABCDEF 的邊長為 a、周長為 L、半徑為 r、邊心距為 d；正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長為 a_1、周長為 L_1、半徑為 r_1、邊心距為 d_1。

求證： $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}_1}=\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_1}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_1}$ 。

想法： 利用兩相似三角形的對應高的比等於對應邊的比，證明兩相似正多邊形邊的比等於半徑比，再證明周長的比等於邊心距的比。

證明：

敘述	理由
(1) 正 n 多邊形 ABCDEF 與正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似	已知 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為相同邊數的正 n 多邊形 ＆ 正多邊形相似定理
(2) $\triangle DOE \sim \triangle D_1O_1E_1$	由(1) ＆ 相似多邊形分成定理(**定理 8.2-9**)
(3) $\triangle DOE$ 中，$\overline{OE}=\mathrm{r}$	已知正 n 多邊形 ABCDEF 的半徑為 r
(4) $\triangle D_1O_1E_1$ 中，$\overline{O_1E_1}=\mathrm{r}_1$	已知正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑為 r_1
(5) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{O_1E_1}}}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_1}$	由(2) ＆ 兩相似多邊形對應邊成比例 ＆ (3) $\overline{OE}=\mathrm{r}$ ＆ (4) $\overline{O_1E_1}=\mathrm{r}_1$
(6) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}}=\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}_1}$	由(1) ＆ 相似多邊形周長比定理(**定理 8.2-1**) ＆ 已知正 n 多邊形 ABCDEF 的邊長為 a、周長為 L；正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長為 a_1、周長為 L_1

(7) $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}_1}=\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_1}$	由(5) & (6) 遞移律
(8) △DOE 中，$\overline{OG}=\mathrm{d}$ 為$\overline{DE}$上的高	已知正 n 多邊形 ABCDEF 的邊心距為 d
(9) $\triangle D_1O_1E_1$ 中，$\overline{O_1G_1}=\mathrm{d}_1$ 為$\overline{D_1E_1}$上的高	已知正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距為 d_1
(10) $\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{O_1E_1}}}$ (即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_1}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_1}$)	由(2) & 兩相似三角形對應高的比等於對應邊的比**(定理 8.2-8)** & (8) $\overline{OG}=\mathrm{d}$、(9) $\overline{O_1G_1}=\mathrm{d}_1$、(3) $\overline{OE}=\mathrm{r}$、(4) $\overline{O_1E_1}=\mathrm{r}_1$
(11) 所以 $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}_1}=\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_1}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_1}$	由(7) & (10) 遞移律

Q. E. D.

例題 9.2-3

如圖 9.2-10，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 分別為邊長為 3 公分及 2 公分的正六邊形，O 點與 O_1 點分別為其中心，$\overline{OG}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1G_1}\perp\overline{A_1B_1}$，則：

(1) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=?$　　　(2) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=?$

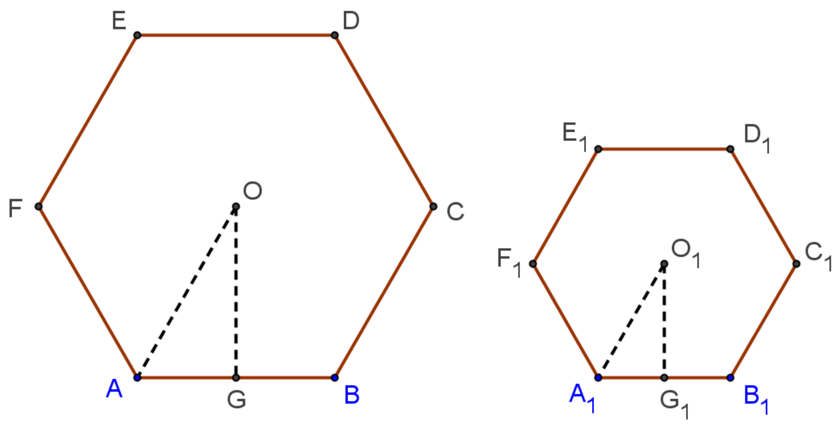


圖 9.2-10

想法：(1) 正多邊形的中心為此正多邊形外接圓與內切圓圓心

(2) 正多邊形外接圓半徑為此正多邊形的半徑(或稱為頂心距)

(3) 正多邊形內切圓半徑為此正多邊形的邊心距

(4) 兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比

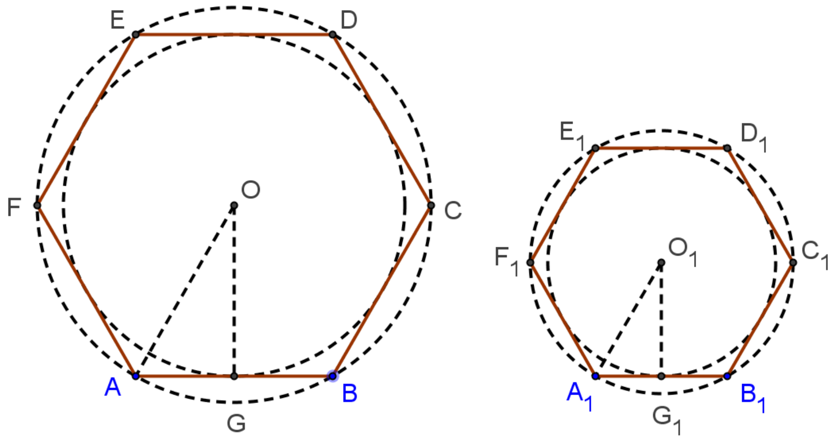


圖 9.2-10(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，分別以$\overline{OA}$、$\overline{OG}$為半徑作正六邊形 ABCDEF 的外接圓與內切圓；以 O_1 點為圓心，分別以$\overline{O_1A_1}$、$\overline{O_1G_1}$為半徑作正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的內切圓；如圖 9.2-10(a)； 其中$\overline{OA}$為正六邊形 ABCDEF 的半徑 $\overline{O_1A_1}$為正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑 $\overline{OG}$為正六邊形 ABCDEF 的邊心距 $\overline{O_1G_1}$為正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距	已知 O 點與 O_1 點分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的中心 & 正多邊形的中心為此正多邊形外接圓與內切圓圓心 & 正多邊形外接圓半徑為此正多邊形的半徑 & 已知$\overline{OG}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1G_1}\perp\overline{A_1B_1}$ & 正多邊形內切圓半徑為此正多邊形的邊心距
(2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{3公分}{2公分}=\dfrac{3}{2}$	由(1) & 兩邊數相等的正多邊形的半徑比等於邊長比 & 已知正六邊形 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長分別為 3 公分及 2 公分
(3) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{3公分}{2公分}=\dfrac{3}{2}$	由(1) & 兩邊數相等的正多邊形的邊心距比等於邊長比 & 已知正六邊形 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長分別為 3 公分及 2 公分

定理 9.2-6 正多邊形面積比定理

兩個邊數相等的正多邊形的面積比，等於邊長的平方比或半徑的平方比或邊心距的平方比。

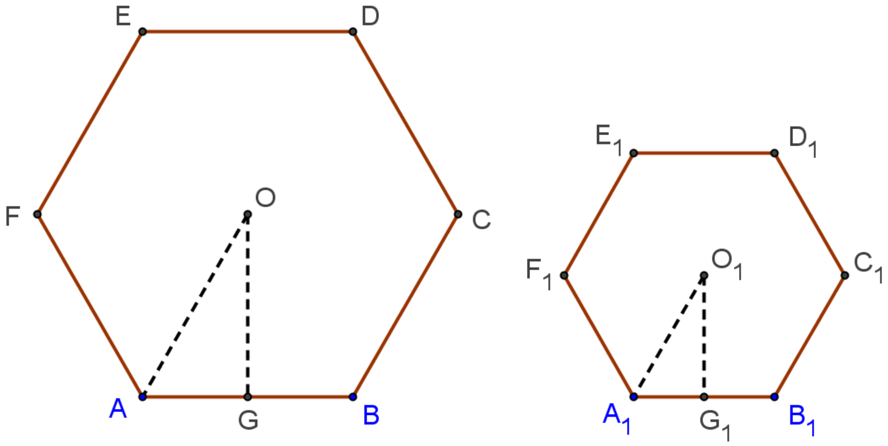


圖 9.2-11

已知：如圖 9.2-11，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為相同邊數的正 n 多邊形，正 n 多邊形 ABCDEF 的邊長為 a、半徑為 r、邊心距為 d；正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長為 a_1、半徑為 r_1、邊心距為 d_1

求證：$\dfrac{\text{正n多邊形ABCDEF面積}}{\text{正n多邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}=\dfrac{a^2}{a_1^2}=\dfrac{r^2}{r_1^2}=\dfrac{d^2}{d_1^2}$

想法：(1) 利用**定理 9.2-3 正多邊形面積定理**：正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半

(2) 利用**定理 9.2-5 正多邊形周長比定理**：兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比

證明：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\text{正n多邊形ABCDEF周長}}{\text{正n多邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{周長}}=\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{d}{d_1}$	**正多邊形周長比定理**：兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比 & 已知正 n 多邊形 ABCDEF 的邊長為 a、半徑為 r、邊心距為 d；正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長為 a_1、半徑為 r_1、邊心距為 d_1

(2) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF面積}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1面積}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\times 正n多邊形ABCDEF周長\times d}{\frac{1}{2}\times 正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長\times d_1}$

$= \dfrac{正n多邊形ABCDEF周長\times d}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長\times d_1}$

$= (\dfrac{正n多邊形ABCDEF周長}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長})\times(\dfrac{d}{d_1})$

正多邊形面積定理：正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半 ＆

已知正 n 多邊形 ABCDEF 的邊心距為 d；

正 n 多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距為 d_1

＆ 倍比定理

(3) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF面積}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1面積}$

$= (\dfrac{d}{d_1})\times(\dfrac{d}{d_1}) = \dfrac{d^2}{d_1^2}$

將(1) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF周長}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長} = \dfrac{d}{d_1}$

代入(2)式得

(4) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF面積}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1面積}$

$= (\dfrac{a}{a_1})\times(\dfrac{a}{a_1}) = \dfrac{a^2}{a_1^2}$

將(1) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF周長}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長} = \dfrac{a}{a_1}$

＆ (1) $\dfrac{d}{d_1} = \dfrac{a}{a_1}$ 代入(2)式得

(5) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF面積}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1面積}$

$= (\dfrac{r}{r_1})\times(\dfrac{r}{r_1}) = \dfrac{r^2}{r_1^2}$

將(1) $\dfrac{正n多邊形ABCDEF周長}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1周長} = \dfrac{r}{r_1}$

＆ (1) $\dfrac{d}{d_1} = \dfrac{r}{r_1}$ 代入(2)式得

(6) 所以 $\dfrac{正n多邊形ABCDEF面積}{正n多邊形A_1B_1C_1D_1E_1F_1面積}$

$= \dfrac{a^2}{a_1^2} = \dfrac{r^2}{r_1^2} = \dfrac{d^2}{d_1^2}$

由(3) 、 (4) ＆ (5) 遞移律

例題 9.2-4

如圖 9.2-12 所示，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 皆為正六邊形，已知正六邊形 ABCDEF 邊長為 4 公分、面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為 $6\sqrt{3}$ 平方公分，且$\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑，$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距，則：

(1) $\overline{A_1B_1}=$？　(2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=$？　(3) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=$？

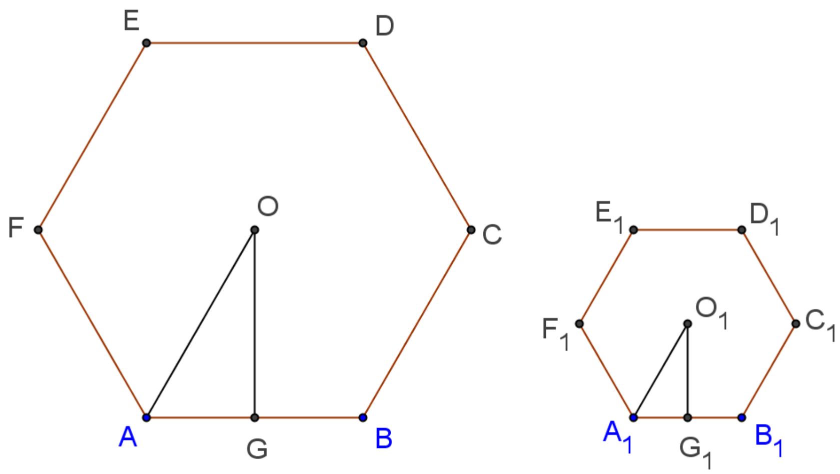


圖 9.2-12

想法：兩個邊數相等的正多邊形的面積比，等於邊長的平方比或半徑的平方比或邊心距的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\text{正六邊形ABCDEF面積}}{\text{正六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$	已知 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 皆為正六邊形，$\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑，$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距 & 兩個邊數相等的正多邊形的面積比，等於邊長的平方比或半徑的平方比或邊心距的平方比
(2) $\dfrac{24\sqrt{3}\text{平方公分}}{6\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{(4\text{公分})^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$	由(1) & 已知正六邊形 ABCDEF 邊長為 4 公分、面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為 $6\sqrt{3}$ 平方公分

(3) $\overline{\mathrm{A_1B_1}}^2=\dfrac{(6\sqrt{3}\text{平方公分})\times(4\text{公分})^2}{24\sqrt{3}\text{平方公分}}$ $=4$ 平方公分	由(2) $\dfrac{24\sqrt{3}\text{平方公分}}{6\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{(4\text{公分})^2}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}^2}$ 求 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}^2$
(4) $\overline{A_1B_1}=-2$ 公分 或 $\overline{A_1B_1}=2$ 公分	由(3) 求平方根
(5) $\overline{A_1B_1}=2$ 公分	由(4) & $\overline{A_1B_1}$為長度必大於 0
(6) $\dfrac{24\sqrt{3}\text{平方公分}}{6\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}^2}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}^2}$	由(2) $\dfrac{24\sqrt{3}\text{平方公分}}{6\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}^2}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}^2}$
(7) $\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}^2}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}^2}=4$	由(6) & 倍比定理
(8) $\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}}=-2$ 或 $\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}}=2$	由(7) 求平方根
(9) $\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{O_1G_1}}}=2$	由(8) & $\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$、$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$皆為長度，其比值必大於 0

圓的圓周是曲線，不能用單位線段直接量圓的周長，也不能用單位面積直接量圓的面積，但觀查圖 9.2-13，我們可以知道當圓的內接多邊形邊數逐漸倍增，多邊形的周界漸大，且逐漸接近圓周，內接多邊形的面積也接近圓面積；而圓的外切多邊形邊數逐漸倍增，多邊形的周界漸小，也逐漸接近圓周，外切多邊形的面積也接近圓面積；所以圓周或圓面積，我們可以看做是邊數無限多的內接或外切多邊形的周長或面積。

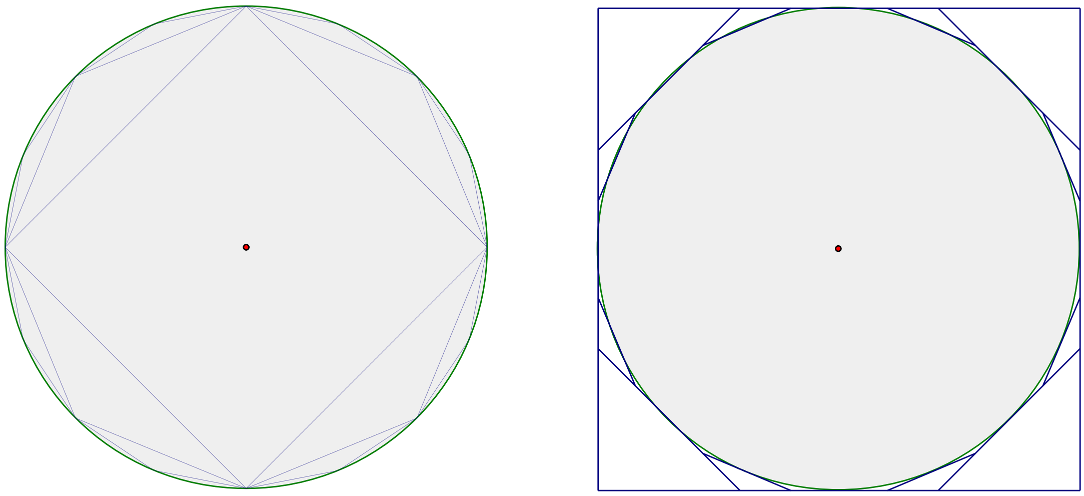


圖 9.2-13

定義 9.2-6 圓周率

圓周與直徑的比值為一常數，這常數叫做圓周率，通常以希臘字母「π」來表示，其值為 3.1415926535897…，一般取近似值為 3.14。

定理 9.2-6 圓周比定理

兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比。

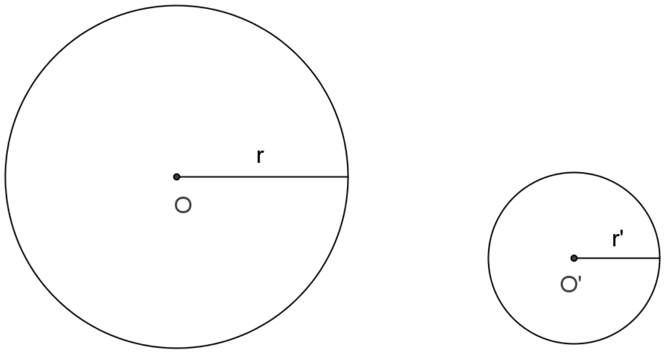


圖 9.2-14

已知：如圖 9.2-14，圓 O 與圓 O`的半徑分別為 r 與 r`，圓周分別為 C 與 C`

求證： C：C`＝ r：r`

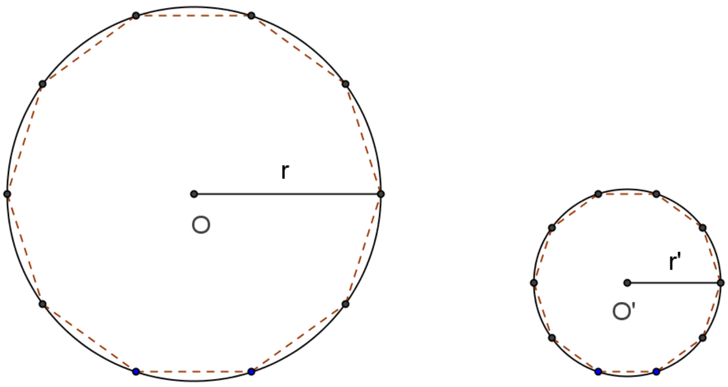


圖 9.2-14(a)

想法：利用正多邊形周長比定理 **(定理 9.2-5)**

證明：

敘述	理由
(1) 在兩圓內分別作相同邊數的正多邊形，設正多邊形的周界分別為 L 與 L` 如圖 9.2-14(a)所示	作圖
(2) L：L`＝r：r`	由(1) & 已知圓 O 與圓 O`的半徑分別為 r 與 r` & 正多邊形周長比定理
(3) 將兩正多邊形的邊數無限倍增，則可當作 L＝C、L`＝C`。	無限多邊數正多邊形與接近圓的關係
(4) 所以 C：C`＝r：r`	由(2) & (3) 代換

Q. E. D.

例題 9.2-5

如圖 9.2-15，已知圓 O 半徑為 3 公分、圓 O_1 半徑為 2 公分，求圓 O 與圓 O_1 周長之比。

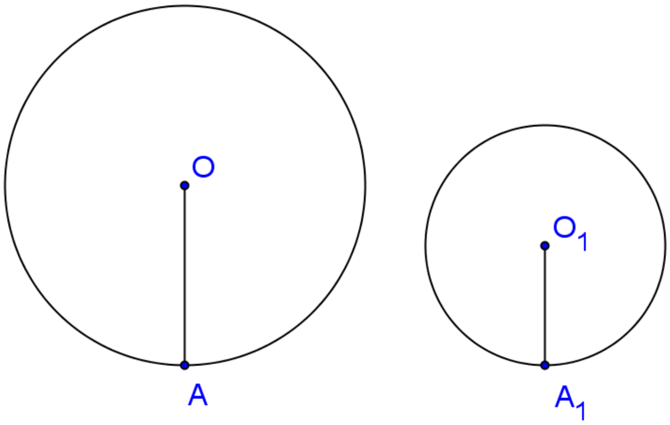


圖 9.2-15

想法：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}$＝3 公分、$\overline{O_1A_1}$＝2 公分	已知圓 O 半徑為 3 公分、圓 O_1 半徑為 2 公分
(2) 圓 O 周長：圓 O_1 周長 ＝$\overline{OA}$：$\overline{O_1A_1}$ ＝(3 公分)：(2 公分) ＝3：2	兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比 ＆ (1) ＆ 倍比定理

例題 9.2-6

如圖 9.2-16，有甲、乙、丙三同心圓，圓心為 O 點，其中甲圓半徑$\overline{OC}$＝1 公分、乙圓半徑$\overline{OB}$＝2 公分、丙圓半徑$\overline{OA}$＝3 公分，求甲、乙、丙三圓周長之比為何？

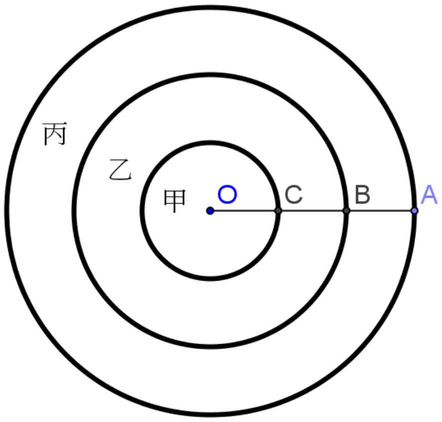


圖 9.2-16

想法：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比

解：

敘述	理由
(1) 甲圓周長：乙圓周長：丙圓周長 ＝$\overline{OC}$：$\overline{OB}$：$\overline{OA}$ ＝(1 公分)：(2 公分) ：(3 公分) ＝1：2：3	兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比 ＆ 已知甲圓半徑$\overline{OC}$＝1 公分、乙圓半徑$\overline{OB}$＝2 公分、丙圓半徑$\overline{OA}$＝3 公分 ＆ 倍比定理

定理 9.2-7 圓周長定理

圓周長等於直徑乘以圓周率。

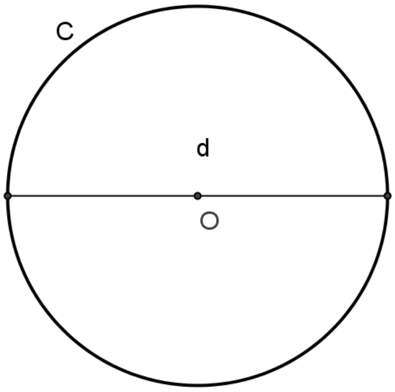


圖 9.2-17

已知：如圖 9.2-17，圓的周長為 C，直徑為 d

求證：圓周長 C＝d×π

想法：利用圓周率定義：**圓周與直徑的比值為圓周率**

證明：

敘述	理由
(1) $\frac{C}{d}=\pi$	圓周率定義 & 已知圓的周長為 C，直徑為 d
(2) 所以 C＝d×π	由(1) 等量乘法公理

Q. E. D.

例題 9.2-7

如圖 9.2-18，已知圓 O 半徑$\overline{OA}$＝3 公分，則圓 O 周長為何？

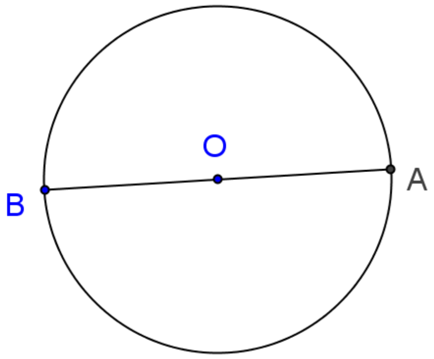


圖 9.2-18

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑$\overline{AB}$＝2$\overline{OA}$ ＝2×(3 公分)＝6 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}$＝3 公分
(2) 圓 O 周長＝(6 公分)×π＝6π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝6 公分

例題 9.2-8

如圖 9.2-19，圓 O_1 與圓 O_2 內切，且圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑，已知 $\overline{O_1A}=10$ 公分，求圓 O_2 的周長為何？

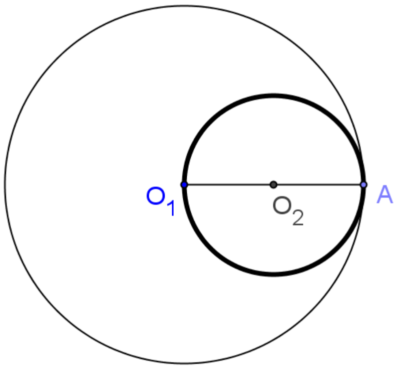


圖 9.2-19

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) 圓 O_2 的周長 $=\overline{O_1A}\times\pi$ $=(10$ 公分$)\times\pi$ $=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 已知圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑， 且 $\overline{O_1A}=10$ 公分

例題 9.2-9

如圖 9.2-20，圓 O_1 與圓 O_2 內切，且圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑，已知 $\overline{O_2A}$＝10 公分，求圓 O_1 的周長為何？

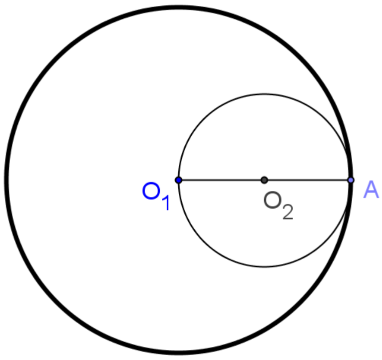


圖 9.2-20

想法： 圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) $\overline{O_1A}=2\overline{O_2A}$ ＝2×(10 公分) ＝20 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑， 且 $\overline{O_1A}$＝10 公分
(2) 圓 O_1 直徑＝$2\overline{O_1A}$ ＝2×(20 公分) ＝40 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 由(1) $\overline{O_1A}$＝20 公分　已證
(3) 圓 O_1 的周長＝圓 O_1 直徑×π ＝(40 公分) ×π ＝40π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(2) 圓 O_1 直徑＝40 公分　已證

例題 9.2-10

如圖 9.2-21，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在$\overline{AD}$上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝12 公分，求圓 O_3 的周長為何？

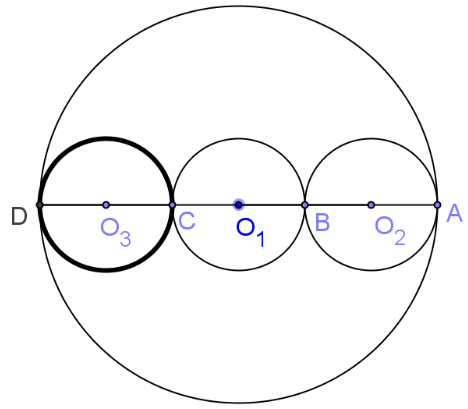


圖 9.2-21

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

	敘述	理由
(1)	大圓 O_1 直徑$\overline{AD}=2\overline{O_1A}$ $=2\times(12$ 公分$)$ $=24$ 公分	圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知大圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}=12$ 公分
(2)	小圓 O_1 直徑$\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑$\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑$\overline{CD}$	已知小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓 & 等圓直徑相等
(3)	$\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{CD}$ $=\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{CD}=3\overline{CD}$	如圖 9.2-21，全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{CD}$
(4)	$\overline{CD}=\overline{AD}\div 3=(24$ 公分$)\div 3=8$ 公分	由(3) 等量除法公理 & 由(1) $\overline{AD}=24$ 公分
(5)	圓 O_3 的周長＝圓 O_3 直徑$\overline{CD}\times\pi$ $=(8$ 公分$)\times\pi$ $=8\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(4) 圓 O_3 直徑$\overline{CD}=8$ 公分

例題 9.2-11

如圖 9.2-22，正方形 ABCD 和圓 O 的周長相同，若正方形 ABCD 邊長為 10π 公分，請問圓 O 的半徑是多少？

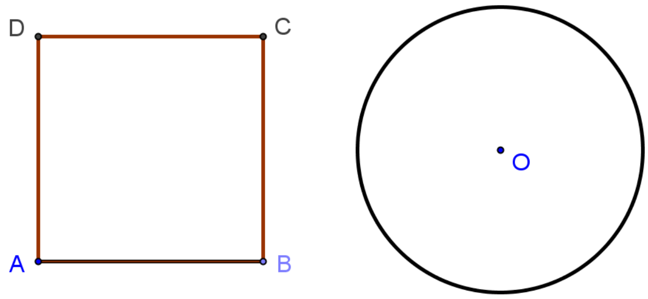


圖 9.2-22

想法：(1)　正方形四邊等長

(2)　圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1)　正方形 ABCD 周長 $=4\times$正方形 ABCD 邊長 $=4\times(10\pi$ 公分$)$ $=40\pi$ 公分	正方形四邊等長 & 周長定義 & 已知正方形 ABCD 邊長為 10π 公分
(2)　圓 O 的周長＝正方形 ABCD 周長 $=40\pi$ 公分	已知正方形 ABCD 和圓 O 的周長相同 & 由(1)正方形 ABCD 周長$=40\pi$ 公分
(3)　圓 O 直徑$\times\pi=40\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(2) 圓 O 的周長$=40\pi$ 公分
(4)　圓 O 直徑$=(40\pi$ 公分$)\div\pi=40$ 公分	由(3) 等量除法公理
(5)　圓 O 半徑$=(40$ 公分$)\div 2=20$ 公分	圓半徑為圓直徑的一半 & 由(4) 圓 O 直徑$=40$ 公分

例題 9.2-12

如圖 9.2-23，正三角形 ABC 和圓 O 的周長相同，若圓 O 半徑為 9 公分，請問正三角形 ABC 的邊長是多少？

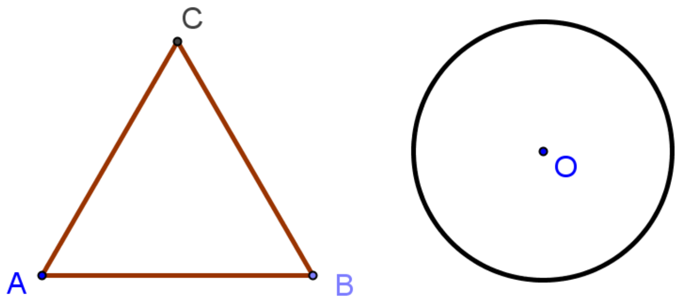


圖 9.2-23

想法：(1) 正三角形三邊等長

(2) 圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑＝2×(9 公分)＝18 公分	直徑為半徑的 2 倍 ＆ 已知圓 O 半徑為 9 公分
(2) 圓 O 的周長＝圓 O 直徑×π ＝(18 公分) ×π ＝18π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 ＆ 由(1) 圓 O 直徑＝18 公分
(3) 正三角形 ABC 周長＝圓 O 周長 ＝18π 公分	已知正三角形 ABC 和圓 O 的周長相同 ＆ 由(2) 圓 O 的周長＝18π 公分
(4) 正三角形 ABC 的邊長 ＝正三角形 ABC 周長÷3 ＝(18π 公分)÷3 ＝6π 公分	正三角形三邊等長 ＆ 由(3) 正三角形 ABC 周長＝18π 公分

例題 9.2-13

已知：如圖 9.2-24，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點

求證：(1) $\overline{FH}$為圓 O 直徑

(2) $\overline{FH}=\overline{AB}$

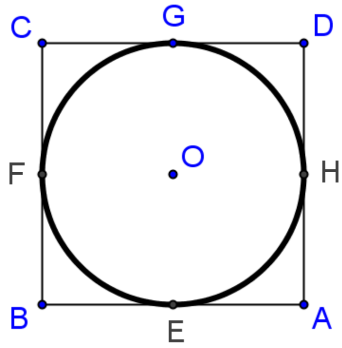


圖 9.2-24

想法：(1) 若可證得 F、O、H 三點共線且$\overline{FH}=2\overline{OF}$，則可證得$\overline{FH}$為圓 O 直徑

(2) 若能證明四邊形 ABFH 為矩形，則可證得$\overline{FH}=\overline{AB}$

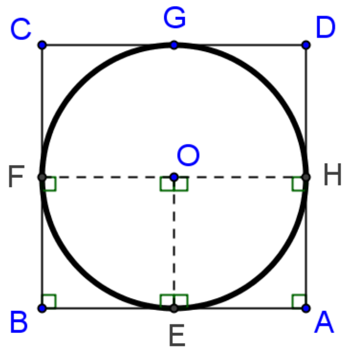


圖 9.2-24(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OE}$、$\overline{OF}$、$\overline{OH}$，如圖 9.2-24(a) 所示；則$\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OH}$ 且$\overline{OE}\perp\overline{AB}$、$\overline{OF}\perp\overline{BC}$、$\overline{OH}\perp\overline{AD}$ (即∠OEB＝∠OEA＝90°、∠OFB＝90°、∠OHA＝90°)	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、H 為切點 & 同圓半徑皆相等 & 過切點的半徑與切線垂直
(2) ∠A＝∠B＝90° (即$\overline{BA}\perp\overline{AD}$ & $\overline{AB}\perp\overline{BC}$)	已知 ABCD 為正方形 & 正方形四個內角皆為直角
(3) 四邊形 AEOH 中，∠A＋∠OEA＋∠EOH＋∠OHA＝360°	如圖 9.2-24(a) & n 多邊形內角和為(n－2)×180°
(4) ∠EOH＝360°－∠A－∠OEA－∠OHA ＝360°－90°－90°－90°＝90°	由(3) 等量減法公理 & (2) ∠A＝90° & (1) ∠OEA＝90°、∠OHA＝90°

(5) $\angle A = \angle OEA = \angle EOH = \angle OHA = 90^\circ$	由(2) $\angle A = 90^\circ$ & (4) $\angle EOH = 90^\circ$ & (1) $\angle OEA = 90^\circ$、$\angle OHA = 90^\circ$ 遞移律
(6) 四邊形 AEOH 為矩形	由(5) 四個內角皆為直角的四邊形為矩形
(7) $\overline{OE} = \overline{HA}$ & $\overline{OH} = \overline{AE}$	由(6) & 矩形兩組對邊等長
(8) $\overline{OE} = \overline{HA} = \overline{OH} = \overline{AE}$	由(7) & (1) $\overline{OE} = \overline{OH}$ 遞移律
(9) 四邊形 AEOH 為正方形	由(6) & (8) 四邊等長的矩形為正方形
(10) 同理可證： $\angle B = \angle OEB = \angle EOF = \angle OFB = 90^\circ$ $\overline{OE} = \overline{BE} = \overline{FB} = \overline{OF}$ 四邊形 BEOF 為正方形	同(1)~(9) 同理可證
(11) $\angle EOF + \angle EOH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	由(10) $\angle EOF = 90^\circ$ & (4) $\angle EOH = 90^\circ$
(12) F、O、H 三點共線	由(11) 平角為 180°
(13) $\overline{FH} = \overline{OF} + \overline{OH} = \overline{OF} + \overline{OF} = 2\overline{OF}$	全量等於分量之和
(14) 所以$\overline{FH}$為圓 O 直徑	由(12) & (13) 圓直徑為圓半徑的 2 倍
(15) 四邊形 ABFH 中， $\angle A = \angle B = \angle BFH = \angle FHA = 90^\circ$	如圖 9.2-24(a) & (12) F、O、H 三點共線 & 由(5) $\angle A = \angle OHA = 90^\circ$ & (10) $\angle B = \angle OFB = 90^\circ$ 遞移律
(16) 四邊形 ABFH 為矩形	由(15) & 四個內角皆為直角的四邊形為矩形
(17) 所以$\overline{FH} = \overline{AB}$	由(16) & 矩形對邊相等

結論：由例題 9.2-13，我們得到下列結果：正方形內切圓之兩對邊切點連線為圓之直徑。

例題 9.2-14

如圖 9.2-25，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，已知正方形 ABCD 的周長為 20 公分，則圓 O 的周長是多少公分？

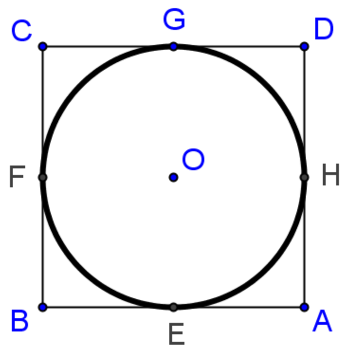


圖 9.2-25

想法：(1) 利用例題 9.2-13 結論：$\overline{FH}$為圓 O 直徑 & $\overline{FH}=\overline{AB}$

(2) 圓周長等於直徑乘以圓周率

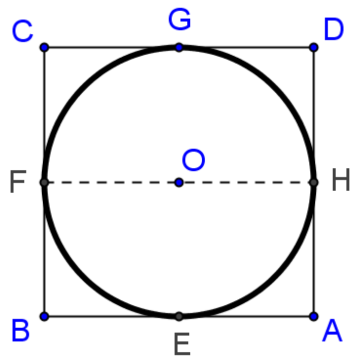


圖 9.2-25(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{FH}$，如圖 9.2-25(a)所示； 則$\overline{FH}$為圓 O 直徑 & $\overline{FH}=\overline{AB}$	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點 & 根據例題 9.2-13 結論
(2) $\overline{AB}$＝(20 公分)÷4＝5 公分	正方形四邊等長 & 已知正方形 ABCD 的周長為 20 公分
(3) 圓 O 直徑$\overline{FH}=\overline{AB}$＝5 公分	由(1) & (2) 遞移律
(4) 圓 O 的周長＝圓 O 直徑$\overline{FH}\times\pi$ ＝(5 公分)×π ＝5π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(3) 圓 O 直徑$\overline{FH}$＝5 公分

例題 9.2-15

如圖 9.2-26，矩形 PQRS 由正方形 PQIH 與正方形 HIRS 所組成，圓 O_1 與圓 O_2 分別為正方形 PQIH 與正方形 HIRS 的內切圓，已知圓 O_1 與圓 O_2 外切於 G 點，且矩形 PQRS 的四邊分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B、C、D、E、F 點，若$\overline{PQ}$＝8 公分，求灰色部分周長為何？

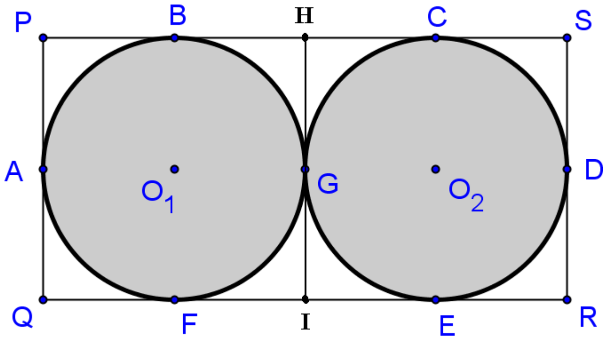
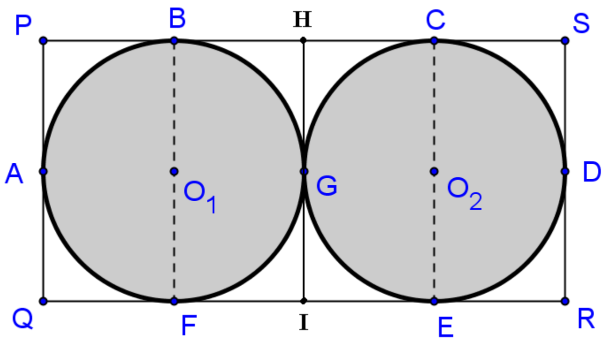


圖 9.2-26

想法：(1) 利用例題 9.2-13 結論：$\overline{BF}$為圓 O_1 直徑 & $\overline{BF}$＝$\overline{PQ}$

$\overline{CE}$為圓 O_2 直徑 & $\overline{CE}$＝$\overline{RS}$

(2) 圓周長等於直徑乘以圓周率



解：

圖 9.2-26(a)

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BF}$、$\overline{CE}$，如圖 9.2-26(a)； 則$\overline{BF}$為圓 O_1 直徑 & $\overline{BF}$＝$\overline{PQ}$ $\overline{CE}$為圓 O_2 直徑 & $\overline{CE}$＝$\overline{RS}$	作圖 & 已知矩形 PQRS 的四邊分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B、C、D、E、F 點 & 根據例題 9.2-13 結論
(2) $\overline{RS}$＝$\overline{PQ}$＝8 公分	已知 PQRS 為矩形 & 矩形對邊等長 & 已知$\overline{PQ}$＝8 公分
(3) 圓 O_1 直徑$\overline{BF}$＝$\overline{PQ}$＝8 公分 圓 O_2 直徑$\overline{CE}$＝$\overline{RS}$＝8 公分	由(1) & (2) 遞移律
(4) 圓 O_1 的周長＝圓 O_1 直徑$\overline{BF}$×π ＝(8 公分)×π ＝8π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(3) 圓 O_1 直徑$\overline{BF}$＝8 公分 圓 O_2 直徑$\overline{CE}$＝8 公分

圓 O_2 的周長＝圓 O_2 直徑$\overline{CE}\times\pi$ ＝(8 公分)×π ＝8π 公分	
(5) 灰色部分周長 ＝圓 O_1 的周長＋圓 O_2 的周長 ＝(8π 公分)＋(8π 公分) ＝16π 公分	如圖 9.2-26(a) 周長定義 & 由(4) 圓 O_1 的周長＝8π 公分 圓 O_2 的周長＝8π 公分

接著，讓我們將第七章所學的定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理，以及第八章所學的畢氏定理，搭配上圓周長定理，來練習以下例題 9.2-16。

例題 9.2-16

如圖 9.2-27，已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝8 公分，弦心距$\overline{OC}$＝3 公分，則圓 O 周長為何？

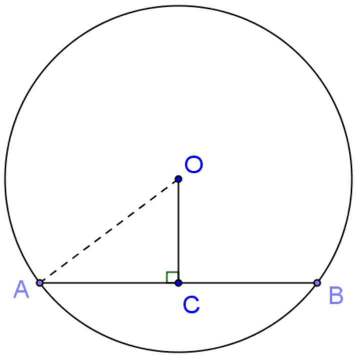


圖 9.2-27

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理得知$\overline{OC}$垂直平分$\overline{AB}$，得$\overline{AC}$長度

(2) 利用畢氏定理求得圓$\overline{OA}$長度

(3) 圓周長等於直徑與圓周率的乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OC}\perp\overline{AB}$，∠OCA＝90°	已知$\overline{OC}$為弦心距
(2) △ACO 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) C 點為$\overline{AB}$中點， $\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times$(8 公分)＝4 公分	由(1) & 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OC}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知弦$\overline{AB}$＝8 公分
(4) △ACO 中， $\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2$ ＝(4 公分)^2＋(3 公分)^2 ＝25 平方公分	由(2) △ACO 為直角三角形 & 畢氏定理 & 已知$\overline{OC}$＝3 公分 & (3) $\overline{AC}$＝4 公分
(5) $\overline{OA}$＝5 公分　或　$\overline{OA}$＝－5 公分	由(4) 求平方根
(6) $\overline{OA}$＝5 公分	由(5) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(7) 圓 O 周長＝2$\overline{OA}\times\pi$ ＝2×(5 公分)×π ＝10π 公分	圓周長等於直徑與圓周率的乘積 & 圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 由(6) $\overline{OA}$＝5 公分　已證

定理 9.2-8 圓弧長定理

圓弧長＝$\frac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}$×圓周長。

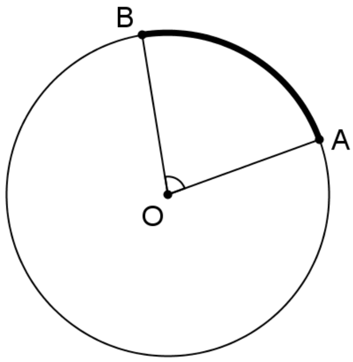


圖 9.2-28

已知：如圖 9.2-28，圓 O 中，∠AOB 為圓心角，且圓 O 周長為 C

求證：$\overset{\frown}{AB}$長度＝$\frac{\angle AOB}{360^{\circ}}\times C$

想法：圓弧長為圓周長的一部分

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}$度數＝∠AOB	弧的度數為所對圓心角的度數 & 已知∠AOB 為圓心角
(2) $\overset{\frown}{AB}$長度＝$\frac{\angle AOB}{360^{\circ}}\times$ 圓 O 周長	圓周度數為 360° & 比例關係
(3) 所以$\overset{\frown}{AB}$長度＝$\frac{\angle AOB}{360^{\circ}}\times C$	由(2) & 已知圓 O 周長為 C 代換

Q. E. D.

例題 9.2-17

如圖 9.2-29，圓 O 半徑為 5 公分，圓心角$\angle AOB = 60^\circ$，則：

(1) 圓 O 周長＝？　　(2) $\overset{\frown}{AB}$長度＝？　　(3) $\overset{\frown}{ACB}$長度＝？

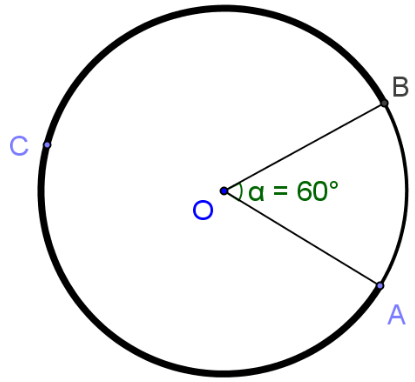


圖 9.2-29

想法：圓弧長$=\dfrac{\textbf{圓心角度}}{\mathbf{360^\circ}}\times$圓周長

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑為 5 公分
(2) 圓 O 周長＝(10 公分)×π＝10π公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝10 公分
(3) $\overset{\frown}{AB}$長度$=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times$圓 O 周長 $=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$公分$)$ $=\dfrac{5\pi}{3}$公分	圓弧長$=\dfrac{\textbf{圓心角度}}{\mathbf{360^\circ}}\times$圓周長 & 已知圓心角$\angle AOB=60^\circ$ & (2) 圓 O 周長＝10π公分
(4) $\overset{\frown}{AB}$長度＋$\overset{\frown}{ACB}$長度＝圓 O 周長	全量等於分量之和
(5) $\overset{\frown}{ACB}$長度＝圓 O 周長－$\overset{\frown}{AB}$長度 $=(10\pi$公分$)-(\dfrac{5\pi}{3}$公分$)$ $=\dfrac{25\pi}{3}$公分	由(4) 等量減法公理 & (2) 圓 O 周長＝10π公分 & (3) $\overset{\frown}{AB}$長度$=\dfrac{5\pi}{3}$公分

例題 9.2-18

如圖 9.2-30，圓 O 半徑為 12 公分，$\overset{\frown}{AB}$長度＝4π 公分，則：

(1) 圓 O 周長＝？　(2) 圓心角$\angle AOB$＝？　(3) $\overset{\frown}{ACB}$長度＝？

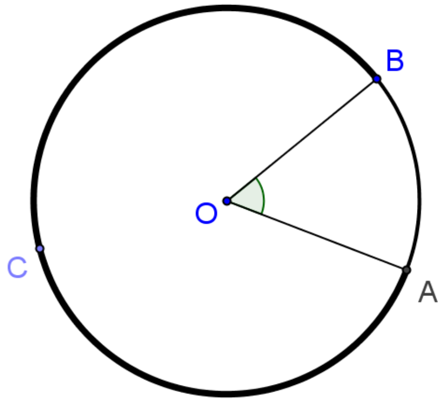


圖 9.2-30

想法：弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑＝2×(12 公分)＝24 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑為 12 公分
(2) 圓 O 周長＝(24 公分)×π＝24π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝24 公分
(3) $\overset{\frown}{AB}$長度＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×圓 O 周長	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & $\overset{\frown}{AB}$所對的圓心角為$\angle AOB$
(4) 4π 公分＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×($24\pi$ 公分)	由(3) & 已知$\overset{\frown}{AB}$＝4π 公分 & (2) 圓 O 周長＝24π 公分
(5) $\angle AOB$＝60°	由(4) 求$\angle AOB$之值
(6) $\overset{\frown}{AB}$長度＋$\overset{\frown}{ACB}$長度＝圓 O 周長	全量等於分量之和
(7) $\overset{\frown}{ACB}$長度＝圓 O 周長－$\overset{\frown}{AB}$長度 ＝(24π 公分)－(4π 公分) ＝20π 公分	由(6) 移項 & (2) 圓 O 周長＝24π 公分 & 已知$\overset{\frown}{AB}$長度＝4π 公分

例題 9.2-19

如圖 9.2-31，OAB 為半徑為 5 公分、圓心角為 45°的扇形，求扇形 OAB 的周長為何？

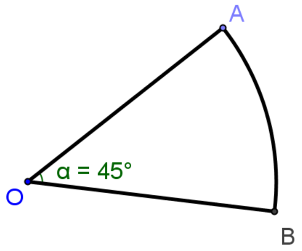


圖 9.2-31

想法：(1)扇形 OAB 的周長＝$\overset{\frown}{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

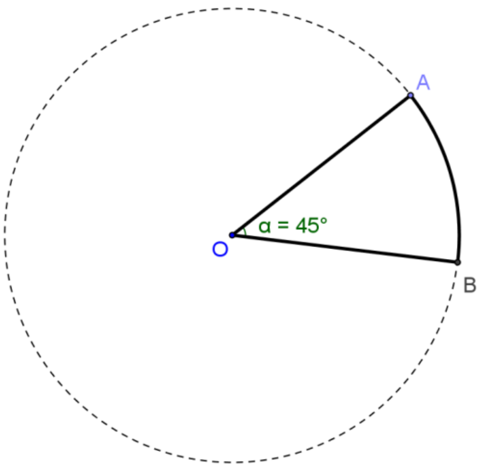


圖 9.2-31(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，$\overline{OA}$為半徑完成此圓，如圖 9.2-31(a)所示	作圖
(2) 圓 O 直徑＝2$\overline{OA}$ ＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知 OAB 為半徑為 5 公分的扇形
(3) 圓 O 周長＝(10 公分)×π ＝10π公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (2) 圓 O 直徑＝10 公分
(4) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{45^\circ}{360^\circ}$×圓 O 周長 $=\dfrac{45^\circ}{360^\circ}$×(10π公分)＝$\dfrac{5\pi}{4}$ 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知 OAB 為圓心角為 45°的扇形 & (3) 圓 O 周長＝10π公分

(5) 扇形 OAB 的周長 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$ $=(\frac{5\pi}{4}+5+5)$ 公分 $=(10+\frac{5\pi}{4})$公分	圓周長定義 & (4) $\overset{\frown}{AB}=\frac{5\pi}{4}$公分 & 已知 OAB 為半徑為 5 公分的扇形

例題 9.2-20

圖 9.2-32 為兩個半徑同為 5 公分的半圓外切所形成的圖形，求此圖形的周長為何？

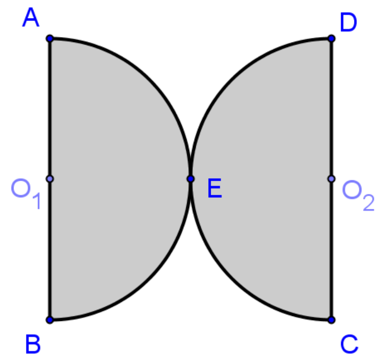


圖 9.2-32

想法：(1) 此圖形的周長＝$\overset{\frown}{AEB}+\overline{AB}+\overset{\frown}{CED}+\overline{CD}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

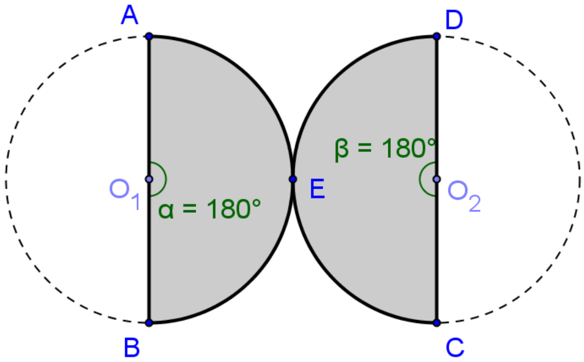


圖 9.2-32(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2 為圓心，$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2C}$ 為半徑完成此兩圓，如圖 9.2-32(a)；其中 $\overline{O_1A}=\overline{O_2C}=5$ 公分	作圖 & 已知此圖形為兩個半徑同為 5 公分的半圓所形成的圖形
(2) 圓 O_1 直徑 $\overline{AB}$＝圓 O_2 直徑 $\overline{CD}$ $=2\overline{O_1A}=2\overline{O_2C}=2\times(5$ 公分$)=10$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & (1) $\overline{O_1A}=\overline{O_2C}=5$ 公分
(3) 圓 O_1 周長＝圓 O_2 周長 ＝(10 公分)×π＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (2) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑＝10 公分
(4) $\overset{\frown}{AEB}=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$圓 O_1 周長 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知此圖形為兩個半徑同為 5 公分的半圓所形成的圖形 & 半圓圓心角為 180°

$\overset{\frown}{CED}=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$圓 O_2 周長 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分	& 由(3) 圓 O_1 周長＝圓 O_2 周長 $=10\pi$ 公分
(5) 此圖形的周長 $=\overset{\frown}{AEB}+\overline{AB}+\overset{\frown}{CED}+\overline{CD}$ $=(5\pi+10+5\pi+10)$ 公分 $=(20+10\pi)$ 公分	周長定義 & (2) 圓 O_1 直徑$\overline{AB}$＝圓 O_2 直徑$\overline{CD}$ $=10$ 公分 & (4) $\overset{\frown}{AEB}=\overset{\frown}{CED}=5\pi$ 公分

例題 9.2-21

圖 9.2-33 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=5$ 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}=10$ 公分，請問著色部分的圖形周長是多少公分？

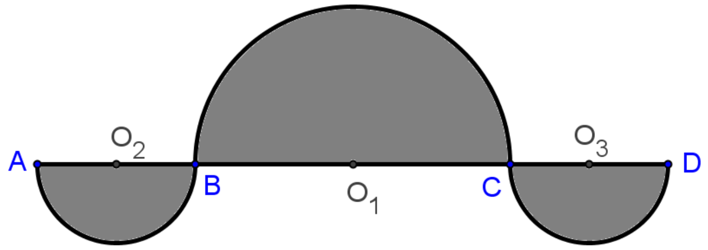


圖 9.2-33

想法：(1) 此圖形的周長$=\overset{\frown}{AEB}+\overset{\frown}{BFC}+\overset{\frown}{CGD}+\overline{AD}$

(2) 弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}\times$圓周長

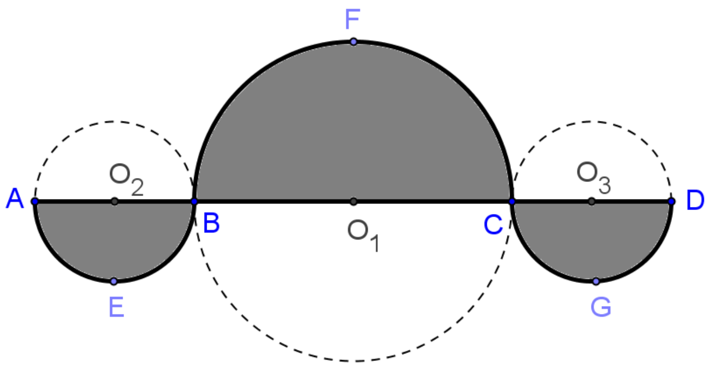


圖 9.2-33(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2、O_3 為圓心，$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2A}$、$\overline{O_3C}$為半徑完成此三圓，如圖 9.2-33(a)；其中$\overline{BC}$為圓 O_1 直徑、$\overline{AB}$為圓 O_2 直徑、$\overline{CD}$為圓 O_3 直徑	作圖 & 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O1、O2、O3 皆在$\overline{AD}$上，且小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=5$ 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}=10$ 公分
(2) 圓 O_2 直徑$\overline{AB}=$圓 O_3 直徑$\overline{CD}$ $=2\overline{O_2A}=2\overline{O_3C}=2\times(5$ 公分$)=10$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=5$ 公分
(3) 圓 O_2 周長$=$圓 O_3 周長 $=(10$ 公分$)\times\pi=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (2) 圓 O_2 直徑$=$圓 O_3 直徑$=10$ 公分

(4) $\overset{\frown}{\mathrm{AEB}}=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_2 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分 $\overset{\frown}{\mathrm{CGD}}=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_3 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 & 半圓圓心角為 180° & 由(3) 圓 O_2 周長＝圓 O_3 周長 $=10\pi$ 公分
(5) 圓 O_1 直徑$\overline{BC}=2\overline{O_1B}$ $=2\times(10$ 公分$)=20$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知大圓半徑 $\overline{O_1B}=10$ 公分
(6) 圓 O_1 周長$=(20$ 公分$)\times\pi=20\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (5) 圓 O_1 直徑＝20 公分
(7) $\overset{\frown}{\mathrm{BFC}}=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_1 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(20\pi$ 公分$)=10\pi$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 & 半圓圓心角為 180° & 由(6) 圓 O_1 周長$=20\pi$ 公分
(8) $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ $=(10$ 公分$)+(20$ 公分$)+(10$ 公分$)$ $=40$ 公分	已知三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上 & 全量等於分量之和 & (2) $\overline{AB}=\overline{CD}=10$ 公分 、 (5) $\overline{BC}=20$ 公分
(9) 此圖形的周長 $=\overset{\frown}{\mathrm{AEB}}+\overset{\frown}{\mathrm{BFC}}+\overset{\frown}{\mathrm{CGD}}+\overline{AD}$ $=(5\pi+10\pi+5\pi+40)$ 公分 $=(40+20\pi)$ 公分	全量等於分量之和 & (4) $\overset{\frown}{\mathrm{AEB}}=\overset{\frown}{\mathrm{CGD}}=5\pi$ 公分 、 (7) $\overset{\frown}{\mathrm{BFC}}=10\pi$ 公分 、 (8) $\overline{AD}=40$ 公分

例題 9.2-22

圖 9.2-34 中，圓 O_1 與 O_2 為兩半徑為 5 公分的等圓，已知兩圓相交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 的圓周之上、O_2 在圓 O_1 的圓周之上，求灰色部分的周長為何？

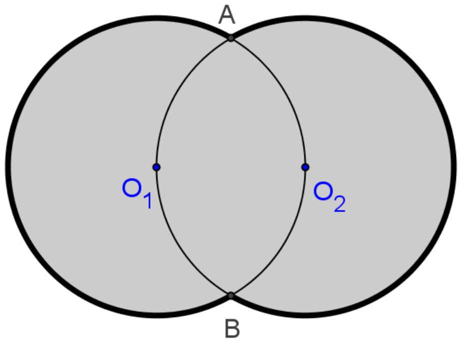


圖 9.2-34

想法：(1) 灰色部分的周長＝$\overset{\frown}{ACB}$＋$\overset{\frown}{ADB}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

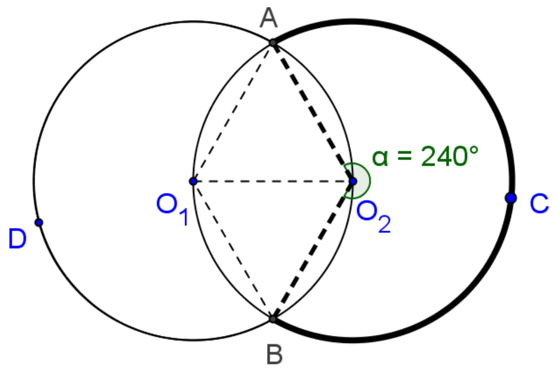


圖 9.2-34(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AO_1}$、$\overline{BO_1}$、$\overline{BO_2}$、$\overline{AO_2}$及$\overline{O_1O_2}$，如圖 9.2-34(a)； 其中$\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=\overline{O_1O_2}$為圓 O_1 半徑 $\overline{AO_2}=\overline{BO_2}=\overline{O_1O_2}$為圓 O_2 半徑	作圖 & 已知兩圓相交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 的圓周之上、O_2 在圓 O_1 的圓周之上
(2) $\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{AO_2}=\overline{BO_2}$ ＝5 公分	由(1) 遞移律 & 已知圓 O_1 與 O_2 為兩半徑為 5 公分的等圓
(3) $\triangle AO_1O_2$ 為正三角形	由(2) $\overline{AO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{AO_2}$ & 正三角形定義

(4) $\angle AO_2O_1 = \angle AO_1O_2 = \angle O_1AO_2 = 60^\circ$	由(3) & 正三角形為等角三角形
(5) $\triangle BO_1O_2$ 為正三角形 $\angle BO_2O_1 = \angle BO_1O_2 = \angle O_1BO_2 = 60^\circ$	由(2) $\overline{BO_1} = \overline{O_1O_2} = \overline{BO_2}$ & 等邊三角形也是等角三角形
(6) $\angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 + \angle AO_2B = 360^\circ$	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(7) $\angle AO_2B = 360^\circ - \angle AO_2O_1 - \angle BO_2O_1$ $= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ$ $= 240^\circ$	由(6) 等量減法公理 & (4) $\angle AO_2O_1 = 60^\circ$、(6) $\angle BO_2O_1 = 60^\circ$
(8) 圓 O_2 直徑 $= 2\overline{AO_2}$ $= 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 由(2) $\overline{AO_2} = 5$ 公分
(9) 圓 O_2 周長 = 圓 O_2 直徑 $\times\pi$ $= (10$ 公分$)\times\pi$ $= 10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(8) 圓 O_2 直徑 = 10 公分
(10) $\overset{\frown}{ACB} = \dfrac{240^\circ}{360^\circ} \times$ 圓 O_2 周長 $= \dfrac{240^\circ}{360^\circ} \times (10\pi$ 公分$)$ $= \dfrac{20\pi}{3}$ 公分	弧長 $= \dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ} \times$ 圓周長 & 由(7) $\angle AO_2B = 240^\circ$ & 由(9) 圓 O_2 周長 $= 10\pi$ 公分
(11) 同理可證：$\overset{\frown}{ADB} = \dfrac{20\pi}{3}$ 公分	同(1)~(10)步驟 同理可證
(12) 灰色部分的周長 $= \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ADB}$ $= (\dfrac{20\pi}{3} + \dfrac{20\pi}{3})$ 公分 $= \dfrac{40\pi}{3}$ 公分	全量等於分量之和 由(10) $\overset{\frown}{ACB} = \dfrac{20\pi}{3}$ 公分 & (11) $\overset{\frown}{ADB} = \dfrac{20\pi}{3}$ 公分

例題 9.2-23

如圖 9.2-35，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 5 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的周長為何？

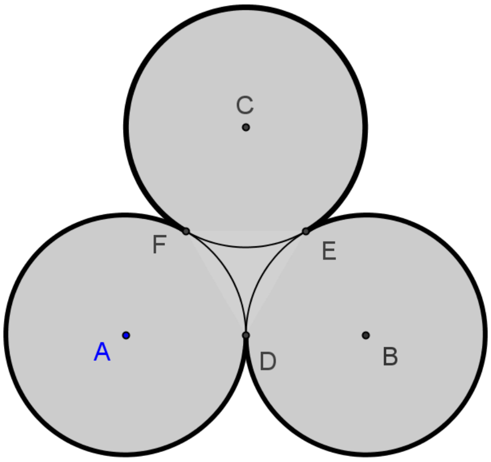


圖 9.2-35

想法： (1) 灰色部分的周長＝$\overset{\frown}{EGF}+\overset{\frown}{DHF}+\overset{\frown}{DIE}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}\times$圓周長

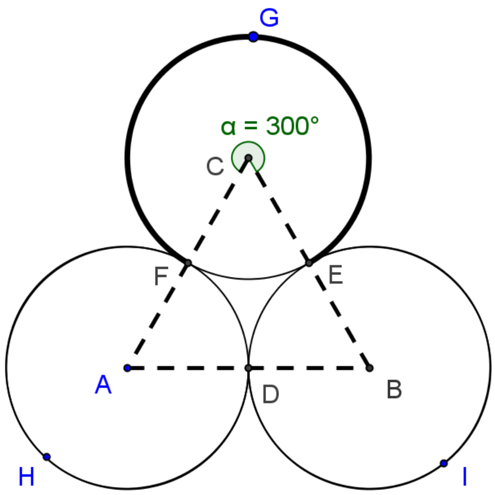


圖 9.2-35(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，如圖 9.2-35(a)，其中$\overline{AB}$通過 D 點、$\overline{BC}$通過 E 點、$\overline{CA}$通過 F 點	作圖 & 已知圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點 & 相切兩圓的連心線，必過切點

(2) $\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{CF}$ ＝5 公分	已知圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 5 公分的等圓
(3) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{AD}=\overline{BD}$＝5 公分
(4) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BE}=\overline{CE}$＝5 公分
(5) $\overline{CA}=\overline{CF}+\overline{AF}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{CF}=\overline{AF}$＝5 公分
(6) △ABC 為正三角形 ∠A＝∠B＝∠C＝60°	由(3) 、 (4) & (5) 等邊三角形也是等角三角形
(7) 優角∠ECF＋銳角∠ECF＝360°	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(8) 優角∠ECF＝360°－銳角∠ECF ＝360°－60°＝300°	由(7) 等量減法公理 & (6) 銳角∠ECF＝60°
(9) 圓 C 直徑＝2$\overline{CE}$ ＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & (2) $\overline{CE}$＝5 公分
(10) 圓 C 周長＝圓 C 直徑×π ＝(10 公分) ×π ＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(9) 圓 C 直徑＝10 公分
(11) $\overset{\frown}{EGF}=\frac{300^\circ}{360^\circ}\times$圓 C 周長 $=\frac{300^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$ 公分) $=\frac{25\pi}{3}$ 公分	弧長＝$\frac{圓心角度}{360^\circ}\times$圓周長 & 由(8) 優角∠ECF＝300° & 由(10) 圓 C 周長＝10π 公分
(12) 同理可證：$\overset{\frown}{DHF}=\frac{25\pi}{3}$ 公分 $\overset{\frown}{DIE}=\frac{25\pi}{3}$ 公分	同(1)~(11) 步驟
(13) 灰色部分的周長 $=\overset{\frown}{EGF}+\overset{\frown}{DHF}+\overset{\frown}{DIE}$ $=(\frac{25\pi}{3}+\frac{25\pi}{3}+\frac{25\pi}{3})$ 公分 ＝25π 公分	全量等於分量之和 & (11) $\overset{\frown}{EGF}=\frac{25\pi}{3}$ 公分 (12) $\overset{\frown}{DHF}=\frac{25\pi}{3}$ 公分 、 $\overset{\frown}{DIE}=\frac{25\pi}{3}$ 公分

例題 9.2-24

圖 9.2-36 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個邊為直徑畫半圓所形成的圖形，且四個半圓相交於 O 點，若正方形邊長為 5 公分，求灰色部分圖形的周長為何？

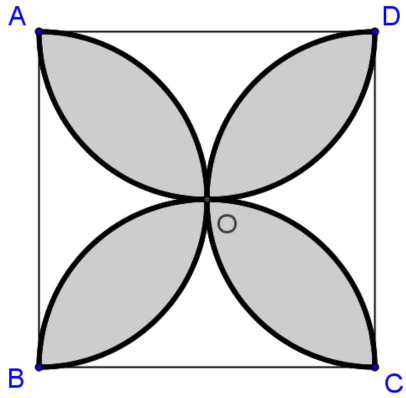


圖 9.2-36

想法：(1) 灰色部分圖形的周長＝$\overset{\frown}{AOB}$＋$\overset{\frown}{BOC}$＋$\overset{\frown}{COD}$＋$\overset{\frown}{DOA}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}$×圓周長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=5$ 公分	已知正方形邊長為 5 公分
(2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\overline{AB}\times\pi=(5\text{ 公分})\times\pi=5\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{AB}=5$ 公分
(3) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓周長$\overset{\frown}{AOB}$ $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}$×以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(5\pi\text{ 公分})=\dfrac{5\pi}{2}$ 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}$×圓周長 & 已知此圖形為分別以正方形四個邊為直徑畫半圓所形成的圖形 & 半圓圓心角為 180° & (2)以$\overline{AB}$為直徑的圓周長＝5π 公分
(4) 同理可證： $\overset{\frown}{BOC}=\overset{\frown}{COD}=\overset{\frown}{DOA}=\dfrac{5\pi}{2}$ 公分	同(1)~(3)步驟 同理可證
(5) 灰色部分圖形的周長 $=\overset{\frown}{AOB}+\overset{\frown}{BOC}+\overset{\frown}{COD}+\overset{\frown}{DOA}$ $=(\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{2})$ 公分 $=10\pi$ 公分	全量等於分量之和 & (3) $\overset{\frown}{AOB}=\dfrac{5\pi}{2}$ 公分 & (4) $\overset{\frown}{BOC}=\overset{\frown}{COD}=\overset{\frown}{DOA}=\dfrac{5\pi}{2}$ 公分

例題 9.2-25

圖 9.2-37 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個頂點為圓心，正方形邊長為半徑畫弧所形成的圖形，且四個弧分別相交於 E、F、G、H 四點，若正方形邊長為 5 公分，求粗線部分圖形的周長為何？

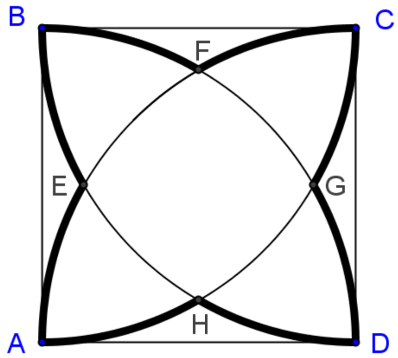


圖 9.2-37

想法：(1) 粗線部分圖形的周長 $=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AH}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CG}+\overset{\frown}{DH}+\overset{\frown}{DG}$

(2) 弧長 $=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}\times$圓周長

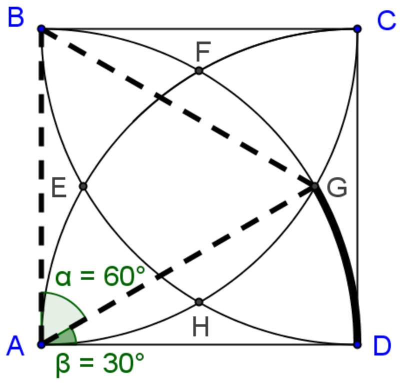


圖 9.2-37(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 $\overline{AG}$、$\overline{BG}$，如圖 9.2-37(a)	作圖
(2) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=5$ 公分 ∠DAB＝∠ABC＝∠BCD＝∠CDA＝90°	已知 ABCD 為正方形 & 正方形四邊等長、四個角皆為直角 & 已知正方形邊長為 5 公分
(3) $\overline{AG}=\overline{AB}=5$ 公分 $\overline{BG}=\overline{AB}=5$ 公分	已知此圖形為正方形四個頂點為圓心，正方形邊長為半徑畫弧所形成的圖形，且四個弧分別相交於 E、F、G、H 四點 & 同圓半徑皆相等 & (2) $\overline{AB}=5$ 公分

(4) $\overline{AG}=\overline{BG}=\overline{AB}=5$ 公分 △ABG 為正三角形	由(3) 遞移律 & 等邊三角形為正三角形
(5) $\angle BAG=\angle AGB=\angle GBA=60°$	由(4) & 正三角形三內角皆為 60°
(6) $\angle BAG+\angle GAD=\angle DAB$	如圖 9.2-37(a)，全量等於分量之和
(7) $\angle GAD=\angle DAB-\angle BAG$ $=90°-60°=30°$	由(6) 等量減法公理 & (2) $\angle DAB=90°$ & (5) $\angle BAG=60°$
(8) 以$\overline{AB}$為半徑的圓周長 $=2\overline{AB}\times\pi=2\times(5$ 公分$)\times\pi=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 圓直徑為半徑的 2 倍 & (2) $\overline{AB}=5$ 公分
(9) $\overset{\frown}{DG}$ $=\frac{30^{o}}{360^{o}}\times$以$\overline{AB}$為半徑的圓周長 $=\frac{30^{o}}{360^{o}}\times(10\pi$ 公分$)=\frac{5\pi}{6}$ 公分	弧長$=\frac{\text{圓心角度}}{360^{o}}\times$圓周長 & 由(7)$\angle GAD=30°$ & (8) 以$\overline{AB}$為半徑的圓周長$=10\pi$ 公分
(10) 同理可證： $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{DH}$ $=\frac{5\pi}{6}$ 公分	同(1)~(9)步驟 同理可證
(11) 粗線部分圖形的周長 $=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AH}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CG}+\overset{\frown}{DH}+\overset{\frown}{DG}$ $=(\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6})$ 公分 $=\frac{20\pi}{3}$ 公分	題目所求 全量等於分量之和 由(9) $\overset{\frown}{DG}=\frac{5\pi}{6}$ 公分 & (10) $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{CG}$ $=\overset{\frown}{DH}=\frac{5\pi}{6}$ 公分

例題 9.2-26

圖 9.2-38 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}=20$ 公分、短邊$\overline{AB}=10$ 公分，求灰色部分的圖形周長為何？

圖 9.2-38

想法：(1) 灰色部分的圖形周長＝$\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{AD}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}=\overline{BC}=20$ 公分 $\overline{CD}=\overline{AB}=10$ 公分	已知 ABCD 為矩形 & 矩形兩組對邊等長 & 已知$\overline{BC}=20$ 公分、$\overline{AB}=10$ 公分
(2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\overline{AB}\times\pi=(10$ 公分$)\times\pi=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{AB}=10$ 公分
(3) $\overset{\frown}{AB}$ $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & (2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長＝10π 公分
(4) 以$\overline{CD}$為直徑的圓周長 $=\overline{CD}\times\pi=(10$ 公分$)\times\pi=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{CD}=10$ 公分
(5) $\overset{\frown}{CD}$ $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{CD}$為直徑的圓周長 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times(10\pi$ 公分$)=5\pi$ 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & (4) 以$\overline{CD}$為直徑的圓周長＝10π 公分
(6) 灰色部分的圖形周長 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{AD}$ $=(5\pi+20+5\pi+20)$ 公分 $=(40+10\pi)$ 公分	全量等於分量之和 & (1) $\overline{AD}=\overline{BC}=20$ 公分 & (3) $\overset{\frown}{AB}=5\pi$ 公分 & (5) $\overset{\frown}{CD}=5\pi$ 公分

例題 9.2-27

圖 9.2-39 中，圓 O_1 與圓 O_2 外切，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為兩圓的外公切線，已知兩圓半徑皆為 2 公分，若想用一線段圍繞兩圓，則此線段至少需多少公分？

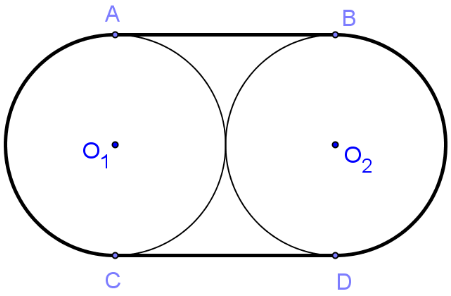


圖 9.2-39

想法：(1) 此線段至少需＝$\overset{\frown}{AC}+\overline{AB}+\overset{\frown}{BD}+\overline{CD}$

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

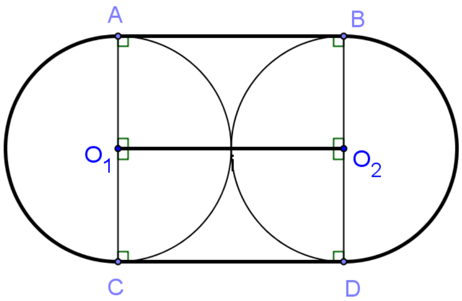


圖 9.2-39(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_2D}$，如圖 9.2-39(a)所示，其中$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1C}\perp\overline{CD}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2D}\perp\overline{CD}$ (即$\angle BAO_1=\angle ABO_2=\angle DCO_1=\angle CDO_2=90^\circ$)	作圖 & 已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為兩圓的外公切線 & 圓心與切點的連線垂直切線
(2) 在四邊形 AO_1O_2B 中 $\overline{O_1A}\parallel\overline{O_2B}$ $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=2$ 公分	如圖 9.2-39(a)所示 由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 垂直於同一線段的兩線互相平行 已知兩圓半徑皆為 2 公分
(3) 四邊形 AO_1O_2B 為平行四邊形	由(2) & 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形
(4) $\overline{AB}\parallel\overline{O_1O_2}$ $\angle BAO_1+\angle AO_1O_2=180^\circ$ & $\angle ABO_2+\angle BO_2O_1=180^\circ$	由(3) 平行四邊形對邊互相平行 & 兩平行線間同側內角互補

(5) $\angle AO_1O_2 = 180° - \angle BAO_1$ $= 180° - 90° = 90°$ & $\angle BO_2O_1 = 180° - \angle ABO_2$ $= 180° - 90° = 90°$	由(4) 等量減法公理 & (1) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = 90°$
(6) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = \angle AO_1O_2$ $= \angle BO_2O_1 = 90°$	由(1) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = 90°$ & (5) $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = 90°$ 遞移律
(7) 四邊形 AO_1O_2B 為矩形	由(3) & (6) 四個角都為直角的平行四邊形為矩形
(8) $\overline{AB} = \overline{O_1O_2} = 2\times(2$ 公分$) = 4$ 公分	由(7) 矩形對邊相等 & 已知圓 O_1 與圓 O_2 外切，且兩圓半徑皆為 2 公分
(9) 同理可證： $\angle DCO_1 = \angle CDO_2 = \angle CO_1O_2$ $= \angle DO_2O_1 = 90°$ & 四邊形 CO_1O_2D 為矩形 & $\overline{CD} = \overline{O_1O_2} = 2\times(2$ 公分$) = 4$ 公分	重複(1)~(8)步驟 同理可證
(10) $\angle AO_1C + \angle AO_1O_2 + \angle CO_1O_2 = 360°$ $\angle BO_2D + \angle BO_2O_1 + \angle DO_2O_1 = 360°$	如圖 9.2-39(a)所示 全量等於分量之和
(11) $\angle AO_1C = 360° - \angle AO_1O_2 - \angle CO_1O_2$ $= 360° - 90° - 90° = 180°$ $\angle BO_2D = 360° - \angle BO_2O_1 - \angle DO_2O_1$ $= 360° - 90° - 90° = 180°$	由(10) 等量減法公理 & (6) $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = 90°$ & (9) $\angle CO_1O_2 = \angle DO_2O_1 = 90°$
(12) AO_1C 與 BO_2D 皆為圓心角為 180°的扇形	由(11) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_2D}$皆為圓半徑
(13) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑 $= 2\times(2$ 公分$) = 4$ 公分	圓的直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知兩圓半徑皆為 2 公分
(14) 圓 O_1 周長＝圓 O_2 周長 $= (4$ 公分$)\times\pi = 4\pi$公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (13) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑＝4 公分
(15) $\overset{\frown}{AC} = \frac{180°}{360°}\times$圓 O_1 周長 $= \frac{180°}{360°}\times(4\pi$公分$) = 2\pi$公分	弧長$= \frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(12) AO_1C 為圓心角為 180°的扇形 & (14) 圓 O_1 周長＝4π公分
(16) $\overset{\frown}{BD} = \frac{180°}{360°}\times$圓 O_2 周長 $= \frac{180°}{360°}\times(4\pi$公分$) = 2\pi$公分	弧長$= \frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(12) BO_2D 為圓心角為 180°的扇形 & (14) 圓 O_2 周長＝4π公分

(17) 此線段至少需 $=\overset{\frown}{AC}+\overline{AB}+\overset{\frown}{BD}+\overline{CD}$ $=2\pi$公分$+4$ 公分$+2\pi$公分$+4$ 公分 $=(8+4\pi)$公分	全量等於分量之和 & (15) $\overset{\frown}{AC}=2\pi$公分　(16) $\overset{\frown}{BD}=2\pi$公分 (8) $\overline{AB}=4$ 公分　(9) $\overline{CD}=4$ 公分

例題 9.2-28

圖 9.2-40 是用三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體。若想用一條緞帶環繞此形體一周，則此緞帶至少需要____________cm。

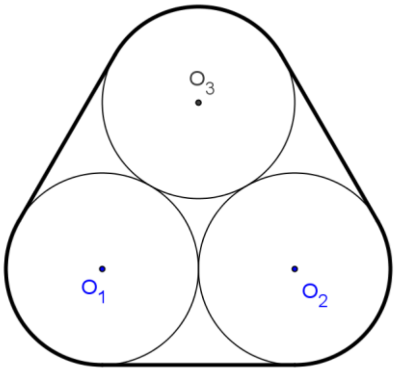


圖 9.2-40

想法：(1) 此線段至少需 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overline{AF}$

(2) 弧長 $=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}\times$ 圓周長

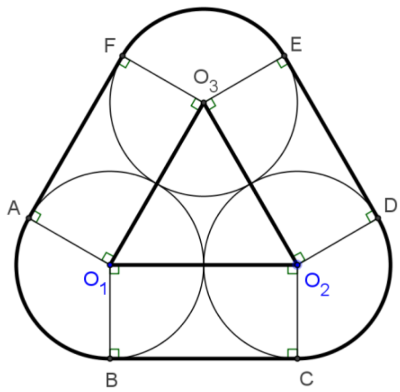


圖 9.2-40(a)

解：

敘述	理由
(1) 在圖形上標示出三圓的圓心 O_1、O_2、O_3；再標示出圓 O1 與圓 O3 外公切線 $\overline{AF}$、圓 O2 與圓 O3 外公切線 $\overline{DE}$、圓 O1 與圓 O2 外公切線 $\overline{BC}$；連接 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$；如圖 9.2-40(a)所示	作圖
(2) $\angle AFO_3=\angle FAO_1=\angle FO_3O_1=\angle AO_1O_3=90^\circ$ & 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & $\overline{AF}=\overline{O_1O_3}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知

(3) $\angle BCO_2=\angle CBO_1=\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ & 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & $\overline{BC}=\overline{O_1O_2}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(4) $\angle DEO_3=\angle EDO_2=\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ & 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & $\overline{DE}=\overline{O_2O_3}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(5) $\triangle O_1O_2O_3$ 中 $\overline{O_1O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=4$ 公分	如圖 9.2-40(a)所示 已知圖形為三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體
(6) $\triangle O_1O_2O_3$ 為正三角形	由(5) & 等邊三角形為正三角形
(7) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1=\angle O_3O_1O_2=60°$	由(6) & 正三角形三個內角皆為 60°
(8) $\angle AO_1B+\angle AO_1O_3+\angle BO_1O_2+\angle O_3O_1O_2=360°$ $\angle CO_2D+\angle CO_2O_1+\angle DO_2O_3+\angle O_1O_2O_3=360°$ $\angle EO_3F+\angle EO_3O_2+\angle FO_3O_1+\angle O_2O_3O_1=360°$	如圖 9.2-40(a)所示 全量等於分量之和
(9) $\angle AO_1B$ $=360°-\angle AO_1O_3-\angle BO_1O_2-\angle O_3O_1O_2$ $=360°-90°-90°-60°=120°$ $\angle CO_2D$ $=360°-\angle CO_2O_1-\angle DO_2O_3-\angle O_1O_2O_3$ $=360°-90°-90°-60°=120°$ $\angle EO_3F$ $=360°-\angle EO_3O_2-\angle FO_3O_1-\angle O_2O_3O_1$ $=360°-90°-90°-60°=120°$	由(8) 等量減法公理 & (2) $\angle AO_1O_3=\angle FO_3O_1=90°$ (3) $\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ (4) $\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ & (7) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1=\angle O_3O_1O_2=60°$
(10) AO_1B 與 CO_2D 與 EO_3F 皆為圓心角為 120° 的扇形	由(9) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$皆為圓半徑
(11) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑＝圓 O_3 直徑 $=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	圓的直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知圖形為三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體
(12) 圓 O_1 周長＝圓 O_2 周長＝圓 O_3 周長 $=(4$ 公分$)\times\pi=4\pi$公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (11) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑＝圓 O_3 直徑＝4 公分

(13) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_1 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(4\pi$公分$)=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) AO_1B 為圓心角為 $120°$的扇形 & (12)圓 O_1 周長$=4\pi$公分
(14) $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_2 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(4\pi$公分$)=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) CO_2D 為圓心角為 $120°$的扇形 & (12)圓 O_2 周長$=4\pi$公分
(15) $\overset{\frown}{EF}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_3 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(4\pi$公分$)=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) EO_3F 為圓心角為 $120°$的扇形 & (12)圓 O_3 周長$=4\pi$公分
(16) 此線段至少需 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overline{AF}$ $=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分$+4$ 公分$+\dfrac{4\pi}{3}$ 公分$+4$ 公分 $+\dfrac{4\pi}{3}$ 公分$+4$ 公分 $=(12+4\pi)$公分	全量等於分量之和 & (13) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分 (14) $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分 (15) $\overset{\frown}{EF}=\dfrac{4\pi}{3}$ 公分 & (2) $\overline{AF}=4$ 公分 (3) $\overline{BC}=4$ 公分 (4) $\overline{DE}=4$ 公分

定理 9.2-9 圓面積定理

圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積。

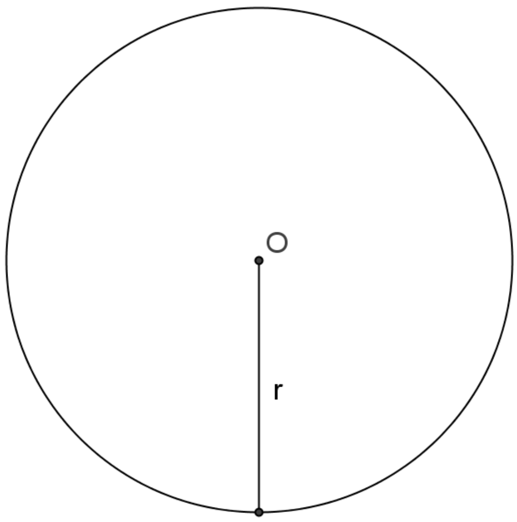


圖 9.2-41

已知：如圖 9.2-41，圓 O 的半徑為 r，面積為 A

求證： 圓面積 $A = \pi \times r^2$

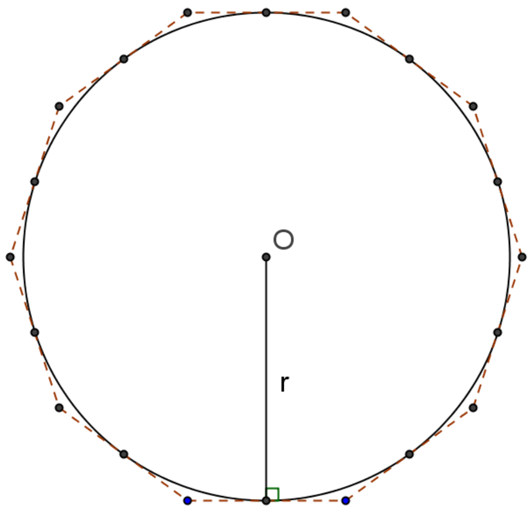


圖 9.2-41(a)

想法：作圓的外切正多邊形並利用圓周長定理

證明：

敘述	理由
(1) 作圓的外切正多邊形，如圖 9.2-41(a)，設其的周長為 L，面積為 B	作圖 假設

(2) $B=\frac{1}{2}\times r\times L$	由(1) & 正多邊形面積定理 & 已知圓 O 的半徑為 r
(3) 若將外切正多邊形的邊數無限倍增，則 B＝A，L＝圓周長＝$\pi\times 2r$	無限多邊數正多邊形與接近圓的關係 & 已知圓 O 的半徑為 r，面積為 A & (1) 假設外切正多邊形的周長為 L，面積為 B & 圓周長等於圓周率乘以直徑
(4) $A=\frac{1}{2}\times r\times(\pi\times 2r)=\pi\times r^2$	由(2) & (3) 代換
(5) 所以圓面積 $A=\pi\times r^2$	由(4) 已證

Q. E. D.

例題 9.2-29

圖 9.2-42 中，圓 O 為半徑 5 公分的圓，求圓 O 面積為何？

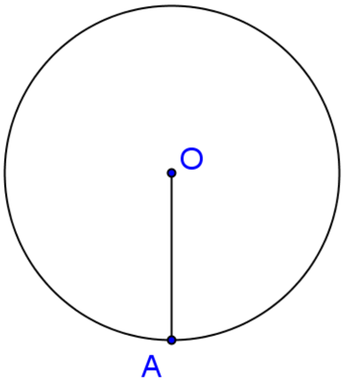


圖 9.2-42

想法：圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 半徑$\overline{OA}$＝5 公分	已知圓 O 為半徑 5 公分的圓
(2) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝$\pi\times$(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) 圓 O 半徑$\overline{OA}$＝5 公分

例題 9.2-30

圖 9.2-43 中，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在$\overline{AD}$上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝12 公分，求灰色部分圖形的面積為何？

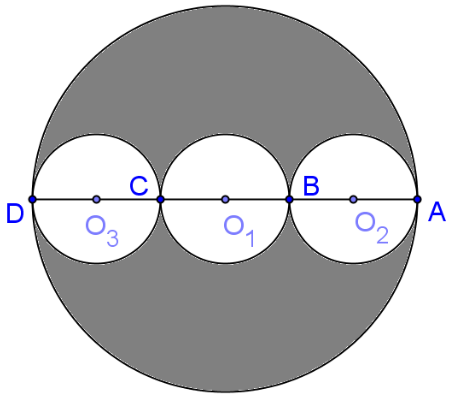


圖 9.2-43

想法：(1) 灰色部分圖形的面積
＝大圓 O_1 面積 － 小圓 O_1 面積 － 小圓 O_2 面積 － 小圓 O_3 面積

(2) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) 大圓 O_1 面積 ＝$\pi\times\overline{O_1A}^2$ ＝$\pi\times$(12 公分)^2＝144π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知大圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝12 公分
(2) 大圓 O_1 直徑$\overline{AD}$＝$2\overline{O_1A}$ ＝2×(12 公分) ＝24 公分	圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知大圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝12 公分
(3) 小圓 O_1 直徑$\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑$\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑$\overline{CD}$	已知小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓 & 等圓直徑相等
(4) $\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{CD}$ $=\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{CD}=3\overline{CD}$	如圖 9.2-43 所示，全量等於分量之和 & 由(3) $\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{CD}$
(5) $\overline{CD}=\overline{AD}\div3$ ＝(24 公分)÷3＝8 公分	由(4) 等量除法公理 & 由(2) $\overline{AD}$＝24 公分
(6) 小圓 O_1 直徑$\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑$\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑$\overline{CD}$＝8 公分	由(4) & (5) 遞移律

(7) 小圓 O_1 半徑$\overline{O_1B}$ $=\overline{BC}\div 2=$(8 公分)$\div 2=4$ 公分 小圓 O_2 半徑$\overline{O_2A}$ $=\overline{AB}\div 2=$(8 公分)$\div 2=4$ 公分 小圓 O_3 半徑$\overline{O_3C}$ $=\overline{CD}\div 2=$(8 公分)$\div 2=4$ 公分	由(6) & 半徑為直徑的一半
(8) 小圓 O_1 面積 $=\pi\times\overline{O_1B}^2$ $=\pi\times$(4 公分)$^2=16\pi$ 平方公分 小圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2A}^2$ $=\pi\times$(4 公分)$^2=16\pi$ 平方公分 小圓 O_3 面積 $=\pi\times\overline{O_3C}^2$ $=\pi\times$(4 公分)$^2=16\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (6) 小圓 O_1 半徑$\overline{O_1B}$ ＝小圓 O_2 半徑$\overline{O_2A}$ ＝小圓 O_3 半徑$\overline{O_3C}=4$ 公分
(9) 灰色部分圖形的面積 ＝大圓 O_1 面積－小圓 O_1 面積－小圓 O_2 面積－小圓 O_3 面積 $=(144\pi-16\pi-16\pi-16\pi)$ 平方公分 $=96\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 大圓 O_1 面積$=144\pi$ 平方公分、 (8) 小圓 O_1 面積＝小圓 O_2 面積 ＝小圓 O_3 面積$=16\pi$ 平方公分

例題 9.2-31

如圖 9.2-44，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為四個切點，若正方形 ABCD 邊長為 10 公分，則灰色部分圖形面積為何？

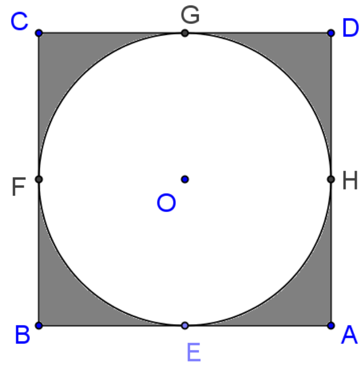


圖 9.2-44

想法：(1) 灰色部分圖形面積＝正方形 ABCD 面積－圓 O 面積

(2) 利用例題 9.2-13 結論：$\overline{FH}$為圓 O 直徑，且$\overline{FH}$＝$\overline{AB}$

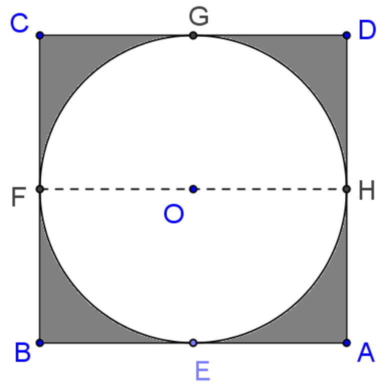


圖 9.2-44(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{FH}$，如圖 9.2-44(a)所示， 則$\overline{FH}$為圓 O 直徑，且$\overline{FH}$＝$\overline{AB}$＝10 公分	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為四個切點 & 利用例題 9.2-13 結論 & 已知正方形 ABCD 邊長為 10 公分
(2) 圓 O 半徑$\overline{OF}$＝$\overline{FH}$÷2 ＝(10 公分)÷2＝5 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 由(1) 圓 O 直徑$\overline{FH}$＝10 公分
(3) 圓 O 面積＝π×$\overline{OF}^2$＝π×(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(2) 圓 O 半徑$\overline{OF}$＝5 公分

(4) 正方形 ABCD 面積＝$\overline{AB}^2$＝(10 公分)^2 ＝100 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知正方形 ABCD 邊長為 10 公分
(5) 灰色部分圖形面積 ＝正方形 ABCD 面積－圓 O 面積 ＝(100 平方公分)－(25π 平方公分) ＝(100－25π) 平方公分	全量等於分量之和 & (4)正方形 ABCD 面積＝100 平方公分 (3) 圓 O 面積＝25π 平方公分

定理 9.2-10 扇形面積定理

扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓面積。

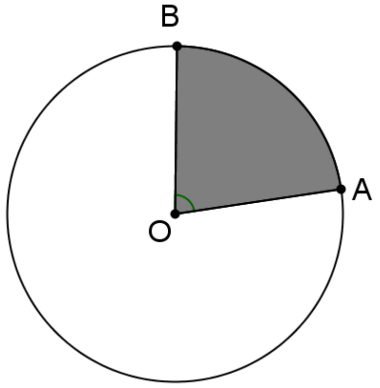


圖 9.2-45

已知：如圖 9.2-45，圓 O 中，∠AOB 為圓心角，且圓 O 面積為 A

求證：扇形 OAB 面積＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times$ A

想法：扇形面積為圓面積的一部分

證明：

敘述	理由
(1) 扇形 OAB 面積＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times$ 圓 O 面積	已知∠AOB 為圓心角 ＆ 比例關係
(2) 所以扇形 OAB 面積＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times$ A	由(1) ＆ 已知圓 O 面積為 A 代換

Q. E. D.

例題 9.2-32

如圖 9.2-46，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=8$ 公分。若$\angle AOB=135^\circ$，則：

(1) 灰色部分為何圖形？

(2) 灰色部分為圓 O 的幾倍？

(3) 灰色部分的面積為何？

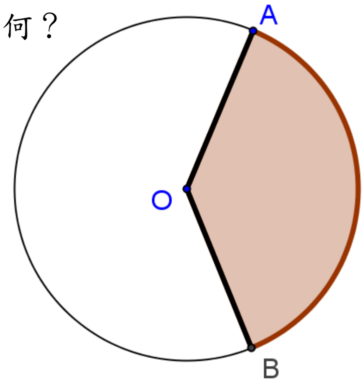


圖 9.2-46

想法：(1) 扇形定義

(2) 周角為 360°

(3) 扇形面積＝$\dfrac{\textbf{圓心角度}}{\mathbf{360^\circ}}$×圓面積

解：

敘述	理由
(1) 灰色部分為扇形 OAB	已知$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑 & 扇形定義
(2) 扇形 OAB 為圓 O 的$\left(\dfrac{135^\circ}{360^\circ}=\dfrac{3}{8}\right)$倍	周角為 360° & 已知扇形 OAB 的圓心角$\angle AOB=135^\circ$
(3) 圓 O 面積$=\pi\times\overline{OA}^2$ $=\pi\times(8$ 公分$)^2$ $=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}=8$ 公分
(4) 扇形 OAB 的面積 $=\dfrac{135^\circ}{360^\circ}\times$圓 O 面積 $=\dfrac{3}{8}\times(64\pi$ 平方公分$)$ $=24\pi$ 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\textbf{圓心角度}}{\mathbf{360^\circ}}$×圓面積 & (3) 圓 O 面積＝$64\pi$ 平方公分 已證

例題 9.2-33

圖 9.2-47 中，兩同心圓的半徑$\overline{OA}$＝8 公分，$\overline{OC}$＝5 公分，且∠AOB＝100°，則灰色部分面積為何？

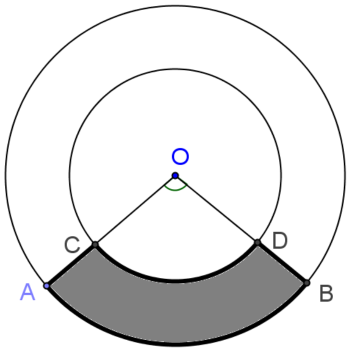


圖 9.2-47

想法：灰色部分面積＝扇形 OAB 的面積－扇形 OCD 的面積

解：

敘述	理由
(1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OA}^2$ $=\pi\times(8$ 公分$)^2=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OA}$＝8 公分
(2) 扇形 OAB 的面積 $=\dfrac{100^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{100^\circ}{360^\circ}\times(64\pi$平方公分$)=\dfrac{160\pi}{9}$ 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知扇形 OAB 圓心角∠AOB＝100° & (1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 ＝64π 平方公分
(3) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OC}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OC}$＝5 公分
(4) 扇形 OCD 的面積 $=\dfrac{100^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{100^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$平方公分$)=\dfrac{250\pi}{36}$ 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知扇形 OCD 圓心角∠COD＝100° & (3) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 ＝25π 平方公分
(5) 灰色部分面積 ＝扇形 OAB 的面積－扇形 OCD 的面積 $=\dfrac{160\pi}{9}$ 平方公分$-\dfrac{250\pi}{36}$ 平方公分 $=\dfrac{65\pi}{6}$ 平方公分	如圖 9.2-47 所示 全量等於分量之和 & (2)扇形 OAB 面積＝$\dfrac{160\pi}{9}$平方公分 (4)扇形 OCD 面積＝$\dfrac{250\pi}{36}$平方公分

例題 9.2-34

圖 9.2-48 中，兩同心圓的半徑$\overline{OA}$＝12 公分，$\overline{OC}$＝5 公分。若 $\overset{\frown}{AB}$長度＝4π 公分，則：

(1) $\overset{\frown}{CD}$長度＝？

(2) 灰色部分面積為何？

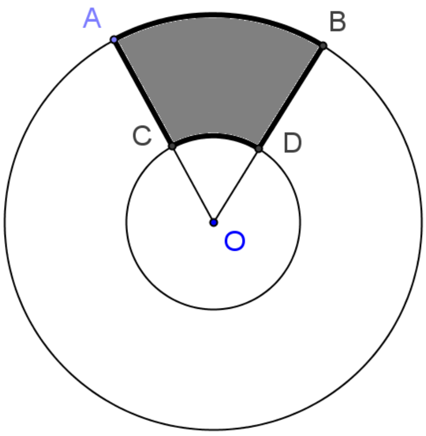


圖 9.2-48

想法：(1) 先求出$\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{CD}$所對的圓心角度數，再求出$\overset{\frown}{CD}$長度

(2) 灰色部分面積＝扇形 OAB 的面積－扇形 OCD 的面積

解：

敘述	理由
(1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長 ＝2$\overline{OA}$×π＝2×(12 公分)×π＝24π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 直徑為半徑的 2 倍 & 已知$\overline{OA}$＝12 公分
(2) $\overset{\frown}{AB}$長度 ＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長	$\overset{\frown}{AB}$所對的圓心角為∠AOB & 周角為 360°
(3) 4π 公分＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×(24π 公分)	由(2) & 已知$\overset{\frown}{AB}$長度＝4π 公分 & (1)以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長＝24π公分
(4) ∠AOB＝60° (即∠COD＝60°)	由(3) 求∠AOB 之值
(5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長 ＝2$\overline{OC}$×π＝2×(5 公分)×π＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 直徑為半徑的 2 倍 & 已知$\overline{OC}$＝5 公分

(6) $\overset{\frown}{CD}$長度 $=\dfrac{\angle COD}{360^{o}}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長 $=\dfrac{60^{o}}{360^{o}}\times(10\pi$ 公分$)=\dfrac{5\pi}{3}$ 公分	$\overset{\frown}{CD}$所對的圓心角為∠COD & 周角為 360° & (4) ∠COD＝60° & (5)以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長＝10π公分
(7) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OA}^2$ $=\pi\times(12$ 公分$)^2=144\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OA}$＝12 公分
(8) 扇形 OAB 的面積 $=\dfrac{60^{o}}{360^{o}}\times$以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{60^{o}}{360^{o}}\times(144\pi$平方公分$)$ $=24\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^{o}}\times$圓面積 & (4) 扇形 OAB 圓心角∠AOB＝60° & (7) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 ＝144π 平方公分
(9) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OC}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OC}$＝5 公分
(10) 扇形 OCD 的面積 $=\dfrac{60^{o}}{360^{o}}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{60^{o}}{360^{o}}\times(25\pi$平方公分$)$ $=\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^{o}}\times$圓面積 & (4) 扇形 OCD 圓心角∠COD＝60° & (9) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 ＝25π 平方公分
(11) 灰色部分面積 ＝扇形 OAB 的面積－扇形 OCD 的面積 $=24\pi$ 平方公分$-\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分 $=\dfrac{119\pi}{6}$ 平方公分	如圖 9.2-48 所示 全量等於分量之和 & (8)扇形 OAB 面積＝24π 平方公分 (10)扇形 OCD 面積$=\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分

例題 9.2-35

圖 9.2-49 為兩個半徑同為 5 公分的半圓外切所形成的圖形，求此圖形的面積為何？

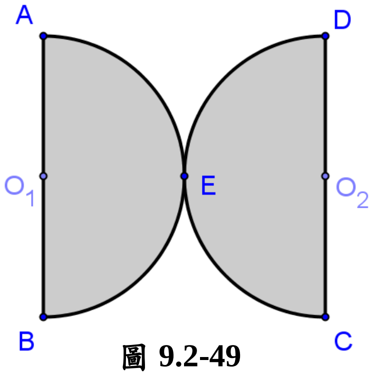


圖 9.2-49

想法：(1) 此圖形的面積＝半圓 O_1AB 面積＋半圓 O_2CD 面積

(2) 扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積

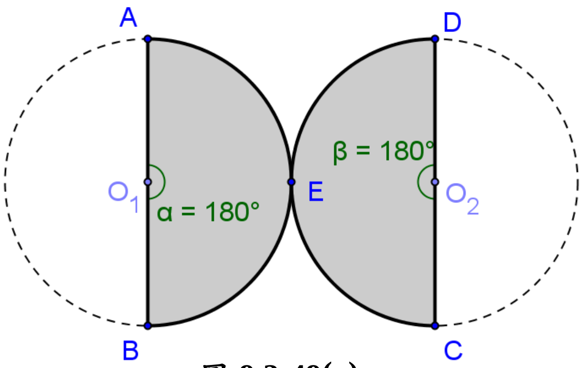


圖 9.2-49(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2 為圓心，$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2C}$為半徑完成此兩圓，如圖 9.2-49(a)；其中$\overline{O_1A}$＝$\overline{O_2C}$＝5 公分	作圖 & 已知此圖形為兩個半徑同為 5 公分的半圓所形成的圖形
(2) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝π×$\overline{O_1A}^2$ ＝π×(5 公分)^2＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) $\overline{O_1A}$＝5 公分
(3) 半圓 O_1AB 的面積 ＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×(25π平方公分) ＝$\dfrac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知此圖形為兩個半徑同為 5 公分的半圓所形成的圖形 & 扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (2) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝25π 平方公分

(4) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2C}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) $\overline{O_2C}=5$ 公分
(5) 半圓 O_2CD 的面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times(25\pi$平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知此圖形為兩個半徑同為 5 公分的半圓所形成的圖形 & 扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (4) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=25\pi$ 平方公分
(6) 此圖形的面積 $=$半圓 O_1AB 面積$+$半圓 O_2CD 面積 $=(\frac{25\pi}{2}$平方公分$)+(\frac{25\pi}{2}$平方公分$)$ $=25\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (3) 半圓 O_1AB 的面積$=\frac{25\pi}{2}$平方公分、 (5) 半圓 O_2CD 的面積$=\frac{25\pi}{2}$平方公分

例題 9.2-36

圖 9.2-50 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=5$ 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}=10$ 公分，請問著色部分的圖形面積為何？

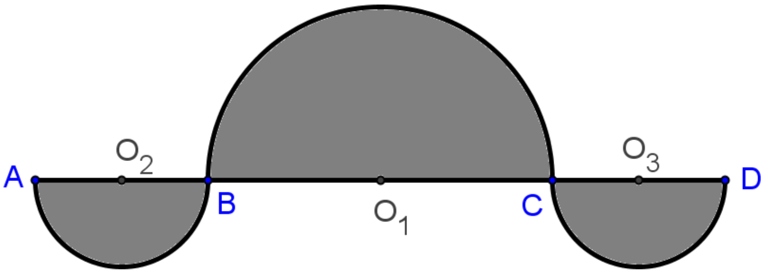


圖 9.2-50

想法：(1) 著色部分的圖形面積

＝半圓 O_1BC 面積＋半圓 O_2AB 面積＋半圓 O_3CD 面積

(2) 扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積

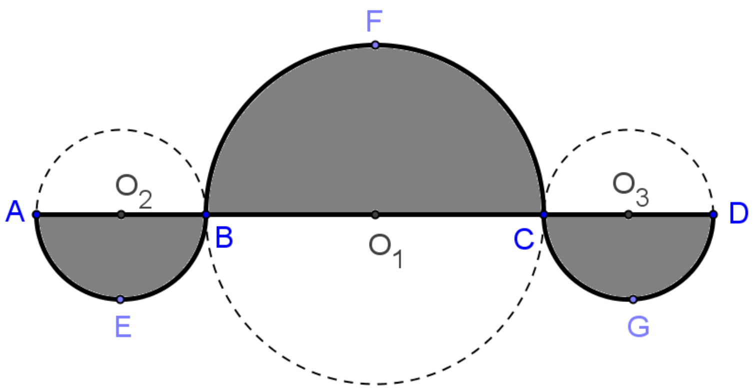


圖 9.2-50(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2、O_3 為圓心，以$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2A}$、$\overline{O_3C}$為半徑完成此三圓，如圖 9.2-50(a)	作圖
(2) 以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\pi\times\overline{O_1B}^2$ $=\pi\times(10\text{ 公分})^2=100\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_1B}=10$ 公分

(3) 半圓 O_1BC 的面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(100\pi$ 平方公分$)$ $=50\pi$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 & 扇形面積$=\frac{圓心角度數}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (2) 以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=100\pi$ 平方公分
(4) 以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2A}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_2A}=5$ 公分
(5) 半圓 O_2AB 的面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形& 扇形面積$=\frac{圓心角度數}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (4) 以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=25\pi$ 平方公分
(6) 以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=\pi\times\overline{O_3C}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_3C}=5$ 公分
(7) 半圓 O_3CD 的面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形& 扇形面積$=\frac{圓心角度數}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (6) 以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=25\pi$ 平方公分
(8) 著色部分的圖形面積 $=$半圓 O_1BC 面積$+$半圓 O_2AB 面積 $+$半圓 O_3CD 面積 $=(50\pi+\frac{25\pi}{2}+\frac{25\pi}{2})$ 平方公分 $=75\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (3) 半圓 O_1BC 的面積$=50\pi$ 平方公分、 (5) 半圓 O_2AB 的面積$=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分、 (7) 半圓 O_3CD 的面積$=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分

例題 9.2-37

圖 9.2-51 中，大的半圓的圓心為 D 點、直徑為$\overline{AB}$；小圓的圓心為 C 點、直徑為$\overline{DE}$，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$。且小圓與半圓相切於 E 點，若$\overline{AB}$＝20 公分，則灰色部分圖形面積為何？

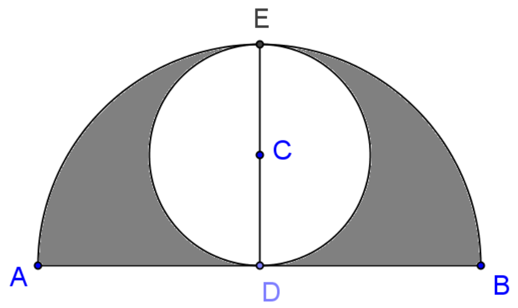


圖 9.2-51

想法：灰色部分圖形面積＝半圓 DAB 面積－圓 C 面積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DE}$也是半圓 DAB 半徑	已知小圓與半圓相切於 E 點 & 半徑定義
(2) 半圓 D 半徑$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DE}$ $=\overline{AB}\div 2$ ＝(20 公分)÷2 ＝10 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知大的半圓的圓心為 D 點、直徑為$\overline{AB}$，且$\overline{AB}$＝20 公分
(3) 以$\overline{DA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{DA}^2$ ＝π×(10 公分)^2＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 半圓 D 半徑$\overline{DA}$＝10 公分 已證
(4) 半圓 DAB 面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{DA}$為半徑的圓面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$(100π 平方公分) ＝50π 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (3)以$\overline{DA}$為半徑的圓面積＝100π平方公分
(5) 圓 C 半徑$\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{DE}\div 2$ ＝(10 公分)÷2 ＝5 公分	同圓半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{DE}$＝10 公分
(6) 圓 C 面積$=\pi\times\overline{CD}^2$＝π×(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (5) 圓 C 半徑$\overline{CD}$＝5 公分 已證

(7) 灰色部分圖形面積 ＝半圓 DAB 面積－圓 C 面積 ＝(50π－25π) 平方公分 ＝25π 平方公分	全量等於分量之和 & (4) 半圓 DAB 面積＝50π 平方公分、 (6) 圓 C 面積＝25π 平方公分

例題 9.2-38

圖 9.2-52 中，大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$；三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$；已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$，且$\overline{AD}=24$ 公分，則灰色部分圖形面積為何？

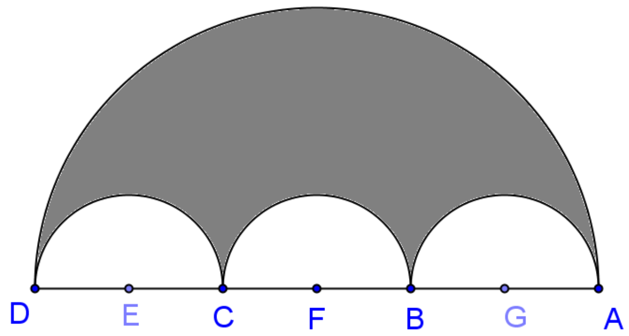


圖 9.2-52

想法： 灰色部分圖形面積

＝半圓 FAD 面積－半圓 ECD 面積－半圓 FBC 面積－半圓 GAB 面積

解：

敘述	理由
(1) 大半圓 F 半徑$\overline{FA}=\overline{FD}$ $=\overline{AD}\div 2$ $=(24$ 公分$)\div 2$ $=12$ 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$， 且$\overline{AD}=24$ 公分
(2) 以$\overline{FA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{FA}^2$ $=\pi\times(12$ 公分$)^2=144\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 大半圓 F 半徑$\overline{FA}=12$ 公分 已證
(3) 半圓 FAD 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{FA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(144\pi$ 平方公分$)$ $=72\pi$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$ & 半圓圓心角為 180° & (2)以$\overline{FA}$為半徑的圓面積$=144\pi$平方公分
(4) $\overline{AD}=\overline{CD}+\overline{BC}+\overline{AB}$	全量等於分量之和
(5) 24 公分$=\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{AB}$	由(4) & 已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$，且$\overline{AD}=24$ 公分
(6) $\overline{AB}=(24$ 公分$)\div 3=8$ 公分	由(5) 求$\overline{AB}$之值
(7) $\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}=8$ 公分	由(6) & 已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$ 遞移律

(8) 小半圓 E 半徑$\overline{EC}=\overline{ED}$
$=\overline{CD}\div 2$
$=(8$ 公分$)\div 2$
$=4$ 公分
小半圓 F 半徑$\overline{FB}=\overline{FC}$
$=\overline{BC}\div 2$
$=(8$ 公分$)\div 2$
$=4$ 公分
小半圓 G 半徑$\overline{GA}=\overline{GB}$
$=\overline{AB}\div 2$
$=(8$ 公分$)\div 2$
$=4$ 公分

同圓半徑為直徑的一半 &
三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點
及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$ &
(7) $\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}=8$ 公分　已證

(9) 以$\overline{EC}$為半徑的圓面積
$=\pi\times\overline{EC}^2$
$=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分
以$\overline{FB}$為半徑的圓面積
$=\pi\times\overline{FB}^2$
$=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分
以$\overline{GA}$為半徑的圓面積
$=\pi\times\overline{GA}^2$
$=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分

圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積
& (8) 小半圓 E 半徑$\overline{EC}=$小半圓 F 半徑$\overline{FB}$
$=$小半圓 G 半徑$\overline{GA}=4$ 公分　已證

(10) 半圓 ECD 面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{EC}$為半徑的圓面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times(16\pi$ 平方公分$)$
$=8\pi$ 平方公分
半圓 FBC 面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{FB}$為半徑的圓面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times(16\pi$ 平方公分$)$
$=8\pi$ 平方公分
半圓 GAB 面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{GA}$為半徑的圓面積
$=\frac{180^o}{360^o}\times(16\pi$ 平方公分$)$
$=8\pi$ 平方公分

扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 &
已知三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點
及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$ &
半圓圓心角為 180° &
(9) 以$\overline{EC}$為半徑的圓面積
$=$以$\overline{FB}$為半徑的圓面積
$=$以$\overline{GA}$為半徑的圓面積
$=16\pi$ 平方公分

(11) 灰色部分圖形面積 ＝半圓 FAD 面積－半圓 ECD 面積－ 半圓 FBC 面積－半圓 GAB 面積 ＝(72π－8π－8π－8π) 平方公分 ＝48π 平方公分	全量等於分量之和 & (3) 半圓 FAD 面積＝72π 平方公分、 (10) 半圓 ECD 面積＝半圓 FBC 面積 ＝半圓 GAB 面積＝8π 平方公分

例題 9.2-39

圖 9.2-53 中，$\overline{BD}$為圓 A 的直徑，分別以圓 O 半徑$\overline{AB}$與$\overline{AD}$為直徑畫兩半圓，其圓心分別為 C 點與 E 點，已知$\overline{BD}$＝20 公分，則灰色部分圖形面積為何？

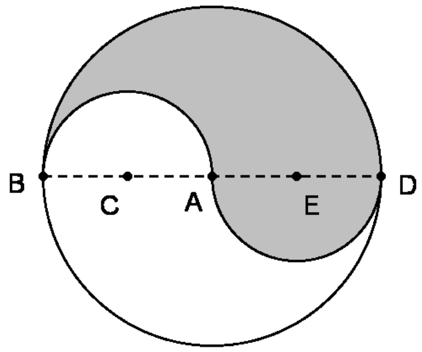


圖 9.2-53

想法： 若半圓 EAD 面積＝半圓 CAB 面積，可將半圓 EAD 補到半圓 CAB 的位置，則灰色部分圖形面積即為半圓 ABD 面積。

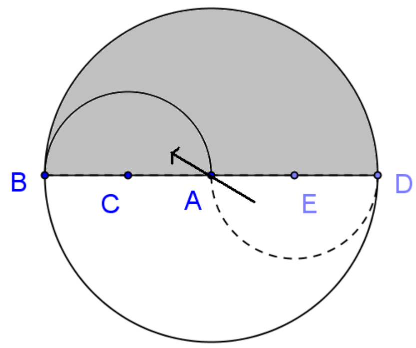


圖 9.2-53(a)

解：

敘述	理由
(1) 圓 A 半徑$\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＝$\overline{BD}$÷2 ＝(20 公分)÷2＝10 公分	同圓半徑為直徑的一半 & $\overline{BD}$＝20 公分為圓 A 的直徑
(2) 半圓 C 半徑$\overline{CA}$＝$\overline{CB}$＝$\overline{AB}$÷2 ＝(10 公分)÷2＝5 公分 半圓 E 半徑$\overline{EA}$＝$\overline{ED}$＝$\overline{AD}$÷2 ＝(10 公分)÷2＝5 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知分別以$\overline{AB}$與$\overline{AD}$為直徑畫兩半圓，其圓心分別為 C 點與 E 點 & (1) $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＝10 公分
(3) 以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 ＝π×$\overline{CA}^2$ ＝π×(5 公分)^2＝25π 平方公分 以$\overline{EA}$為半徑的圓面積 ＝π×$\overline{EA}^2$ ＝π×(5 公分)^2＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 半圓 C 半徑$\overline{CA}$＝半圓 E 半徑$\overline{EA}$ ＝5 公分

(4) 半圓 CAB 面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分 半圓 EAD 面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{EA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (3) 以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{EA}$為半徑的圓面積 ＝25π 平方公分
(5) 半圓 CAB 面積＝半圓 EAD 面積 $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	由(4)
(6) 如圖 9.2-53(a)所示： 灰色部分圖形面積＝半圓 ABD 面積	由(5) & 將塗色的半圓 EAD 面積補到未塗色的半圓 CAB 面積
(7) 以$\overline{AB}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AB}^2$ $=\pi\times(10$ 公分$)^2=100\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) $\overline{AB}=10$ 公分
(8) 半圓 ABD 面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times$以$\overline{AB}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^o}{360^o}\times(100\pi$ 平方公分$)$ ＝50π 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (7)以$\overline{AB}$為半徑的圓面積＝100π平方公分

例題 9.2-40

平面上有 A、C 兩點，若分別以 A、C 為圓心，以$\overline{AC}$為半徑畫兩圓，且$\overleftrightarrow{AC}$分別交兩圓於 B、D 兩點，再分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑畫兩半圓，如圖 9.2-54 所示，已知$\overline{AC}$＝10 公分，則灰色部分圖形面積為何？

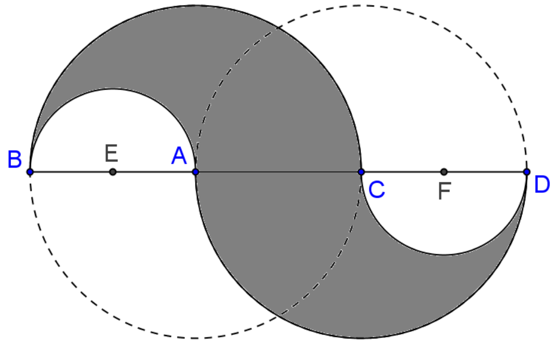


圖 9.2-54

想法：若能證明圓 A 與圓 C 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸且 E、F 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點，則以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸，將$\overleftrightarrow{HG}$右側的圖形旋轉到$\overleftrightarrow{HG}$左側，使得 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合，圓 C 與圓 A 重合。
則灰色部分圖形面積＝圓 A 面積－圓 E 面積。

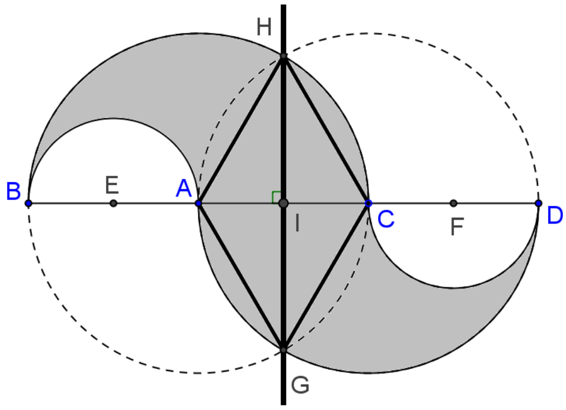


圖 9.2-54(a)

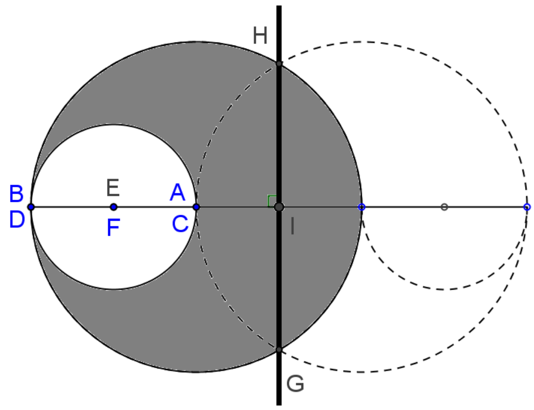


圖 9.2-54(b)

解：

敘述	理由
(1) 假設圓 A 與圓 B 相交於 H、G 兩點，作$\overleftrightarrow{HG}$ $\overleftrightarrow{AC}$交於 I 點，並連接$\overline{AH}$、$\overline{CH}$、$\overline{CG}$、$\overline{AG}$，如圖 9.2-54(a)所示，則$\overline{AH}$＝$\overline{AG}$為圓 A 半徑、$\overline{CH}$＝$\overline{CG}$為圓 C 半徑	作圖
(2) 圓 A 中，$\overline{AH}$＝$\overline{AG}$＝$\overline{AB}$＝$\overline{AC}$＝10 公分	已知$\overline{AC}$＝10 公分為圓 A 半徑 & 由(1) $\overline{AH}$＝$\overline{AG}$為圓 A 半徑 & 同圓中半徑皆相等

(3) 圓 C 中， $\overline{CH}=\overline{CG}=\overline{CD}=\overline{AC}=10$ 公分	已知$\overline{AC}=10$ 公分為圓 C 半徑 & 由(1) $\overline{CH}=\overline{CG}$為圓 C 半徑 & 同圓中半徑皆相等
(4) $\overline{AH}=\overline{AG}=\overline{CH}=\overline{CG}=10$ 公分	由(2) $\overline{AH}=\overline{AG}=\overline{AC}=10$ 公分 & (3) $\overline{CH}=\overline{CG}=\overline{AC}=10$ 公分　遞移律
(5) 四邊形 AHCG 為菱形	由(4) & 四邊相等的四邊形為菱形
(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{IA}=\overline{IC}=\overline{AC}\div2=(10$ 公分$)\div2=5$ 公分	由(5) & 菱形兩對角線互相垂直且平分 & 已知$\overline{AC}=10$ 公分
(7) A、C 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、$\overline{IA}=\overline{IC}$ & 線對稱定義
(8) 圓 A 與圓 C 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸	由(7) & 已知圓 A 半徑＝圓 B 半徑
(9) $\overline{IB}=\overline{IA}+\overline{AB}$ $=(5$ 公分$)+(10$ 公分$)=15$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IA}=5$ 公分、(2) $\overline{AB}=10$ 公分
(10) $\overline{ID}=\overline{IC}+\overline{CD}$ $=(5$ 公分$)+(10$ 公分$)=15$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IC}=5$ 公分、(3) $\overline{CD}=10$ 公分
(11) $\overline{IB}=\overline{ID}=15$ 公分	由(9) & (10) 遞移律
(12) B、D 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、(11) $\overline{IB}=\overline{ID}$ & 線對稱定義
(13) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓中， $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{AB}\div2=(10$ 公分$)\div2=5$ 公分	同圓中半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{AB}=10$ 公分
(14) 以$\overline{CD}$為直徑的半圓中， $\overline{FC}=\overline{FD}=\overline{CD}\div2=(10$ 公分$)\div2=5$ 公分	同圓中半徑為直徑的一半 & (3) $\overline{CD}=10$ 公分
(15) $\overline{IE}=\overline{IA}+\overline{EA}$ $=(5$ 公分$)+(5$ 公分$)=10$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IA}=5$ 公分、(13) $\overline{EA}=5$ 公分
(16) $\overline{IF}=\overline{IC}+\overline{FC}$ $=(5$ 公分$)+(5$ 公分$)=10$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IC}=5$ 公分、(14) $\overline{FC}=5$ 公分
(17) $\overline{IE}=\overline{IF}=10$ 公分	由(15) & (16) 遞移律
(18) E、F 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、(17) $\overline{IE}=\overline{IF}$ & 線對稱定義
(19) 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸，將$\overleftrightarrow{HG}$右側的圖形旋轉到$\overleftrightarrow{HG}$左側，使得 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合，圓 C 與圓 A 重合，如圖 9.2-54(b)所示	由 (7)、(12) & (18)　則 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合 由 (8) 則圓 C 與圓 A 重合

(20) 圖 9.2-54(b)中，以$\overline{AB}$為直徑的半圓與以$\overline{CD}$為直徑的半圓形成一完整的圓，此圓以 E(F)為圓心，以$\overline{AB}$($\overline{CD}$)為直徑	由 (18) & (2) $\overline{AB}$＝10 公分 & (3) $\overline{CD}$＝10 公分
(21) 圓 A 面積＝$\pi\times\overline{AB}^2$＝$\pi\times$(10 公分)^2 ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 A 半徑$\overline{AB}$＝10 公分
(22) 圓 E 面積＝$\pi\times\overline{EA}^2$＝$\pi\times$(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (13) $\overline{EA}$＝5 公分
(23) 灰色部分圖形面積 ＝圓 A 面積－圓 E 面積 ＝(100π 平方公分)－(25π 平方公分) ＝75π 平方公分	如圖 9.2-54(b)，全量等於分量之和 & (21) 圓 A 面積＝100π 平方公分、(22) 圓 C 面積＝25π 平方公分

例題 9.2-41

圖 9.2-55 中，若圓 O 半徑為 10 公分，$\angle AOB=60°$、$\angle COD=90°$、$\angle EOF=120°$，則灰色部分圖形面積為何？

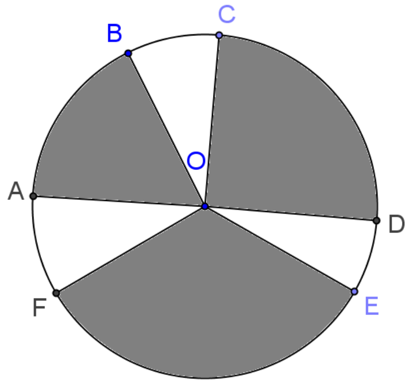


圖 9.2-55

想法： 灰色部分圖形面積＝扇形 OAB 面積＋扇形 OCD 面積＋扇形 OEF 面積

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 面積＝π×(圓 O 半徑)^2 ＝π×(10 公分)^2 ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓 O 半徑為 10 公分
(2) 扇形 OAB 面積＝$\frac{60°}{360°}$×(圓 O 面積) 扇形 OCD 面積＝$\frac{90°}{360°}$×(圓 O 面積) 扇形 OEF 面積＝$\frac{120°}{360°}$×(圓 O 面積)	扇形面積＝$\frac{圓心角度數}{360°}$×圓面積 & 已知$\angle AOB=60°$、$\angle COD=90°$、$\angle EOF=120°$
(3) 灰色部分圖形面積 ＝扇形 OAB 面積＋扇形 OCD 面積＋扇形 OEF 面積 ＝$\frac{60°}{360°}$×(圓 O 面積)＋$\frac{90°}{360°}$×(圓 O 面積)＋$\frac{120°}{360°}$×(圓 O 面積) ＝($\frac{60°}{360°}+\frac{90°}{360°}+\frac{120°}{360°}$)×(圓 O 面積) ＝$\frac{270°}{360°}$×(100π平方公分)＝75π平方公分	全量等於分量之和 & (2) 扇形 OAB 面積＝$\frac{60°}{360°}$×(圓 O 面積) 扇形 OCD 面積＝$\frac{90°}{360°}$×(圓 O 面積) 扇形 OEF 面積＝$\frac{120°}{360°}$×(圓 O 面積) & (1) 圓 O 面積＝100π 平方公分

例題 9.2-42

圖 9.2-56 中，四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形外部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

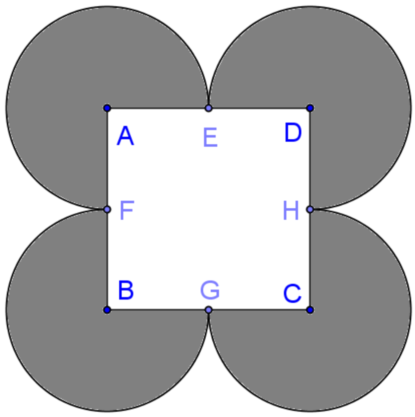


圖 9.2-56

想法： 灰色部分圖形面積

＝扇形 AEF 面積＋扇形 BFG 面積＋扇形 CHG 面積＋扇形 DEH 面積

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=10$ 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形 & 正方形四邊等長且四個角皆為直角
(2) 優角$\angle EAF+\angle A=360°$ 優角$\angle FBG+\angle B=360°$ 優角$\angle HCG+\angle C=360°$ 優角$\angle EDH+\angle D=360°$	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(3) 優角$\angle EAF=360°-\angle A$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle FBG=360°-\angle B$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle HCG=360°-\angle C$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle EDH=360°-\angle D$ $=360°-90°=270°$	由(2) 等量減法公理 & (1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ 已證
(4) $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{BG}=\overline{CG}=\overline{CH}=\overline{DH}=\overline{DE}=(10$ 公分$)\div 2=5$ 公分	已知分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點 & 等圓半徑皆相等

(5) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AE}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{BF}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{BF}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{CG}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{DH}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{DH}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (4) $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=5$ 公分
(6) 扇形 AEF 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AE}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分) 扇形 BFG 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{BF}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分) 扇形 CHG 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{CG}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分) 扇形 DEH 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{DH}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (3) 優角∠EAF＝優角∠FBG＝優角∠HCG ＝優角∠EDH＝270°、 (5) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{BF}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{DH}$為半徑的圓面積 $=25\pi$ 平方公分
(7) 灰色部分圖形面積 ＝扇形 AEF 面積＋扇形 BFG 面積＋扇形 CHG 面積＋扇形 DEH 面積 $=(\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ})\times(25\pi$ 平方公分) $=\frac{1080^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分) $=75\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (6) 扇形 AEF 面積＝扇形 BFG 面積 ＝扇形 CHG 面積＝扇形 DEH 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

例題 9.2-43

圖 9.2-57 中，四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形內部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

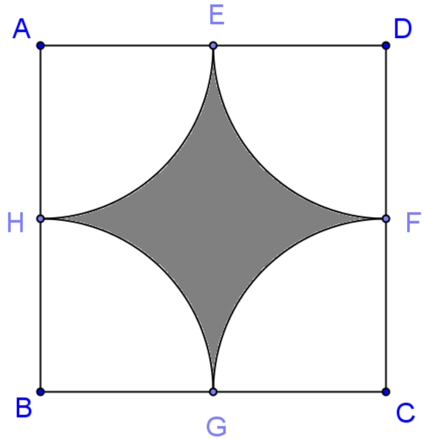


圖 9.2-57

想法：灰色部分圖形面積＝正方形 ABCD 面積－(扇形 AEH 面積＋扇形 BHG 面積＋扇形 CFG 面積＋扇形 DEF 面積)

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=10$ 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形 ＆ 正方形四邊等長且四個角皆為直角
(2) 正方形 ABCD 面積 $=\overline{AB}^2=(10$ 公分$)^2=100$ 平方公分	正方形面積為邊長的平方 ＆ 由(1) $\overline{AB}=10$ 公分
(3) $\overline{AE}=\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{BG}=\overline{CG}=\overline{CF}=\overline{DF}=\overline{DE}=(10$ 公分$)\div 2=5$ 公分	已知分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形內部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點 ＆ 等圓半徑皆相等
(4) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AE}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{BH}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{BH}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{CG}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (3) $\overline{AE}=\overline{BH}=\overline{CG}=\overline{DF}=5$ 公分

以$\overline{DF}$為半徑的圓面積

$=\pi\times\overline{DF}^2$

$=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分

(5) 扇形 AEH 面積

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AE}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

扇形 BHG 面積

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{BH}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

扇形 CFG 面積

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{CG}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

扇形 DEF 面積

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{DF}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 &

(1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$、

(4) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積

$=$以$\overline{BH}$為半徑的圓面積

$=$以$\overline{CG}$為半徑的圓面積

$=$以$\overline{DF}$為半徑的圓面積

$=25\pi$ 平方公分

(6) 灰色部分圖形面積

＝正方形 ABCD 面積－

(扇形 AEH 面積＋扇形 BHG 面積＋扇形 CFG 面積＋扇形 DEF 面積)

$=100$ 平方公分$-(\frac{90^\circ}{360^\circ}+\frac{90^\circ}{360^\circ}+\frac{90^\circ}{360^\circ}+\frac{90^\circ}{360^\circ})\times(25\pi$ 平方公分)

$=(100-\frac{360^\circ}{360^\circ}\times25\pi)$ 平方公分

$=(100-25\pi)$ 平方公分

全量等於分量之和 &

(2) 正方形 ABCD 面積＝100 平方公分、

(4) 扇形 AEH 面積＝扇形 BHG 面積

＝扇形 CFG 面積＝扇形 DEF 面積

$=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分)

例題 9.2-44

圖 9.2-58 中，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，若正方形邊長為 10 公分，且∠POQ＝120°，則灰色部分圖形面積為何？

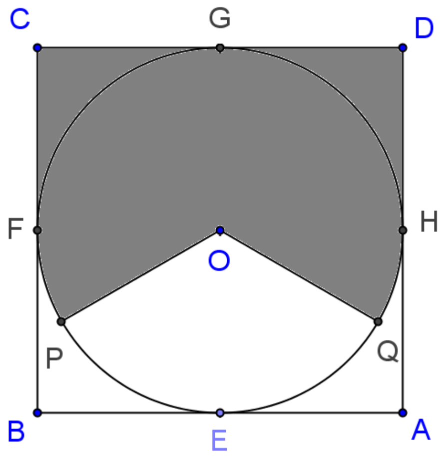


圖 9.2-58

想法：(1) 利用例題 9.2-13 結論：$\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且四邊形 ABFH 與 CDHF 皆為矩形，$\overline{FH}=\overline{AB}=\overline{CD}$

(2) 灰色部分圖形面積＝矩形 CDHF 面積＋(扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積)

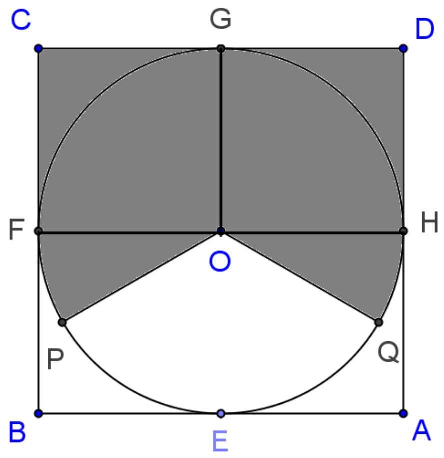


圖 9.2-58(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{FH}$，則$\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且四邊形 ABFH 與 CDHF 皆為矩形，$\overline{FH}=\overline{AB}=\overline{CD}=10$ 公分； 作$\overline{OG}$，則四邊形 CGOF 為正方形，$\overline{GO}=\overline{OF}=\overline{CF}=\overline{CG}$；如圖 9.2-58(a)	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點 & 利用例題 9.2-13 結論 & 已知正方形邊長為 10 公分

(2) 圓 O 半徑$\overline{GO}=\overline{OF}=\overline{OH}=\overline{FH}\div 2$ ＝(10 公分)÷2＝5 公分	同圓中半徑皆相等且為直徑的一半 & 由(1) $\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且$\overline{FH}$＝10 公分
(3) 矩形 CDHF 中，長$\overline{FH}$＝10 公分、 寬$\overline{CF}=\overline{GO}$＝5 公分	由(1) $\overline{FH}$＝10 公分，$\overline{CF}=\overline{GO}$ & (2) $\overline{GO}$＝5 公分　遞移律
(4) 矩形 CDHF 面積 ＝$\overline{FH}\times\overline{CF}$＝(10 公分)×(5 公分) ＝50 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (3) 矩形 CDHF 中，長$\overline{FH}$＝10 公分、 寬$\overline{CF}$＝5 公分
(5) ∠FOH＝180°	由(1) $\overline{FH}$為圓 O 的直徑 & 平角為 180°
(6) ∠FOP＋∠HOQ＋∠POQ＝∠FOH	如圖 9.2-58(a)所示，全量等於分量之和
(7) ∠FOP＋∠HOQ ＝∠FOH－∠POQ ＝180°－120°＝60°	由(6) 等量減法公理 & (5) ∠FOH＝180°、已知∠POQ＝120°
(8) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OF}^2$＝π×(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 O 半徑$\overline{OF}$＝5 公分
(9) 扇形 OFP 面積 $=\dfrac{\angle FOP}{360^\circ}$×(圓 O 面積)	扇形面積＝$\dfrac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & 扇形 OFP 的圓心角為∠FOP
(10) 扇形 OHQ 面積 $=\dfrac{\angle HOQ}{360^\circ}$×(圓 O 面積)	扇形面積＝$\dfrac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & 扇形 OHQ 的圓心角為∠HOQ
(11) 扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積 $=(\dfrac{\angle FOP}{360^\circ}+\dfrac{\angle HOQ}{360^\circ})$×(圓 O 面積) $=(\dfrac{\angle FOP+\angle HOQ}{360^\circ})$×(25π 平方公分) $=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}$×(25π 平方公分) $=\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分	由(9)式 ＋ (10)式 & (7) ∠FOP＋∠HOQ＝60°、 (8) 圓 O 面積＝25π 平方公分
(12) 灰色部分圖形面積 ＝矩形 CDHF 面積＋ (扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積) ＝(50 平方公分)＋($\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分) ＝(50＋$\dfrac{25\pi}{6}$) 平方公分	全量等於分量之和 & (4) 矩形 CDHF 面積＝50 平方公分、 (11) 扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積 ＝$\dfrac{25\pi}{6}$ 平方公分　已證

例題 9.2-45

圖 9.2-59 中，四邊形 ABCD 為正方形，以 C 點為圓心、以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BD}$，若正方形邊長為 10 公分，則灰色部分圖形面積為何？

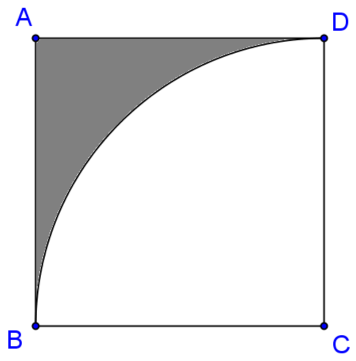


圖 9.2-59

想法：灰色部分圖形面積＝正方形 ABCD 面積－扇形 CBD 面積

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積 ＝(10 公分)^2＝100 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知正方形邊長為 10 公分
(2) 圓 C 半徑$\overline{CB}$＝$\overline{CD}$＝10 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，以 C 點為圓心、以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BD}$ & 正方形四邊等長、同圓半徑相等
(3) ∠C＝90°	已知四邊形 ABCD 為正方形 & 正方形四個角皆為直角
(4) 圓 C 面積＝π×$\overline{CB}^2$＝π×(10 公分)^2 ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(2) 圓 C 半徑$\overline{CB}$＝10 公分
(5) 扇形 CBD 面積＝$\dfrac{\angle C}{360^\circ}$×(圓 C 面積) ＝$\dfrac{90^\circ}{360^\circ}$×(100π 平方公分) ＝25π 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & (3) 扇形 CBD 的圓心角∠C＝90°、 (4) 圓 C 面積＝100π 平方公分
(6) 灰色部分圖形面積 ＝正方形 ABCD 面積－扇形 CBD 面積 ＝(100 平方公分)－(25π 平方公分) ＝(100－25π) 平方公分	如圖 9.2-59 所示 全量等於分量之和 & (1) 正方形 ABCD 面積＝100 平方公分、 (5) 扇形 CBD 面積＝25π 平方公分

例題 9.2-46

圖 9.2-60 中，四邊形 ABCD 為正方形，$\overline{BD}$為其對角線，以 C 點為圓心、以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BD}$，若正方形邊長為 10 公分，則灰色部分圖形面積為何？

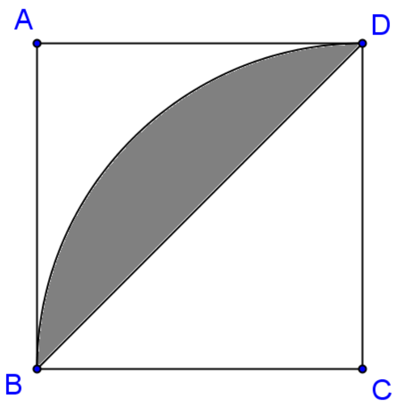


圖 9.2-60

想法：灰色部分圖形面積＝扇形 CBD 面積－△BCD 面積

解：

敘述	理由
(1) 圓 C 半徑$\overline{CB}$＝$\overline{CD}$＝10 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，以 C 點為圓心、以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BD}$ & 正方形四邊等長、同圓半徑相等
(2) ∠C＝90°	已知四邊形 ABCD 為正方形 & 正方形四個角皆為直角
(3) 圓 C 面積＝$\pi\times\overline{CB}^2=\pi\times(10$ 公分$)^2$ ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) 圓 C 半徑$\overline{CB}$＝10 公分
(4) 扇形 CBD 面積＝$\dfrac{\angle C}{360^\circ}\times$(圓 C 面積) ＝$\dfrac{90^\circ}{360^\circ}\times$(100π 平方公分) ＝25π 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (2) 扇形 CBD 的圓心角∠C＝90°、(3) 圓 C 面積＝100π 平方公分
(5) △BCD 中，$\overline{BC}$為底、$\overline{CD}$為高	由(2) ∠C＝90°
(6) △BCD 面積＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{CD}}{2}$ ＝$\dfrac{(10\text{公分})\times(10\text{公分})}{2}$＝50 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 & 由(5) △BCD 中，$\overline{BC}$為底、$\overline{CD}$為高 & (1) $\overline{CB}$＝$\overline{CD}$＝10 公分

(7) 灰色部分圖形面積 ＝扇形 CBD 面積－△BCD 面積 ＝(25π 平方公分)－(50 平方公分) ＝(25π－50) 平方公分	如圖 9.2-60 所示 全量等於分量之和 & (4) 扇形 CBD 面積＝25π 平方公分、 (6) △BCD 面積＝50 平方公分

例題 9.2-47

圖 9.2-61 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$，則灰色部分圖形面積為何？

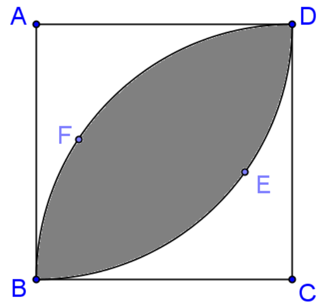


圖 9.2-61

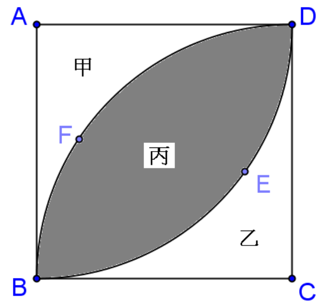


圖 9.2-61(a)

解法一： 丙面積(即灰色部分圖形面積)

＝正方形 ABCD 面積－甲面積－乙面積

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積 ＝(10 公分)^2＝100 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形
(2) 圖 9.2-61(a)中，甲面積＝乙面積 ＝(100－25π) 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$ & 例題 9.2-45 結論
(3) 甲面積＋乙面積＋丙面積 ＝正方形 ABCD 面積	如圖 9.2-61(a)所示，全量等於分量之和
(4) 丙面積(即灰色部分圖形面積) ＝正方形 ABCD 面積－甲面積－乙面積 ＝[100－(100－25π)－(100－25π)] 平方公分 ＝(50π－100) 平方公分	由(3) 等量減法公理 & (1) 正方形 ABCD 面積＝100 平方公分、 (2) 甲面積＝乙面積＝(100－25π) 平方公分

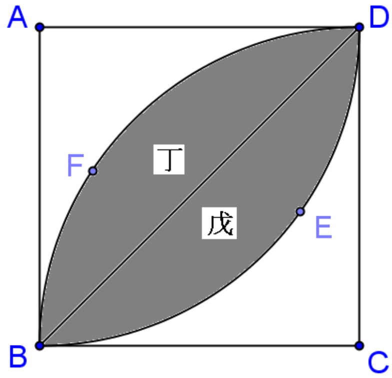


圖 9.2-61(b)

解法二： 灰色部分圖形面積＝丁面積＋戊面積

敘述	理由
(1) 圖 9.2-61(b)中，丁面積＝戊面積 ＝$(25\pi-50)$ 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$ & 例題 9.2-46 結論
(2) 灰色部分圖形面積 ＝丁面積＋戊面積 ＝$[(25\pi-50)+(25\pi-50)]$ 平方公分 ＝$(50\pi-100)$ 平方公分	如圖 9.2-61(b)所示，全量等於分量之和 & (1) 丁面積＝戊面積＝$(25\pi-50)$ 平方公分

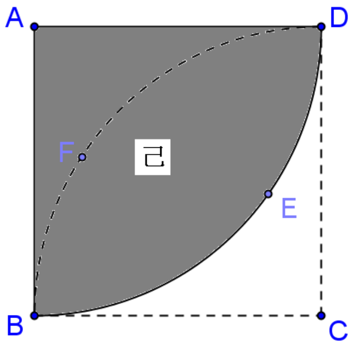


圖 9.2-61(c)-1

+

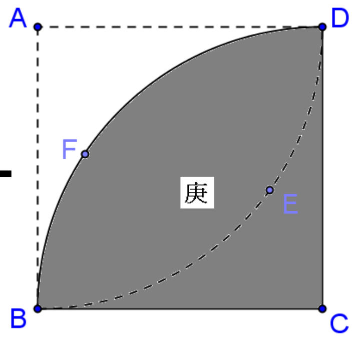


圖 9.2-61(c)-2

=

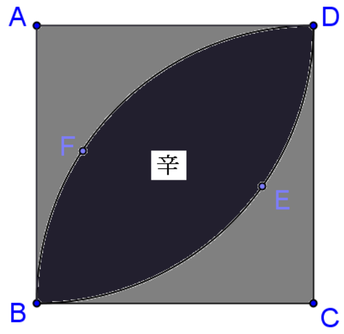


圖 9.2-61(c)-3

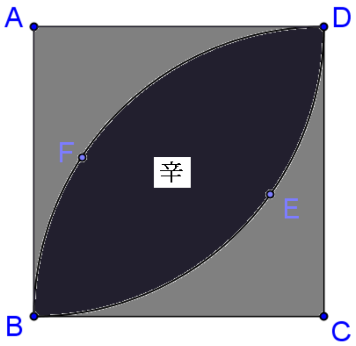


圖 9.2-61(c)-3

−

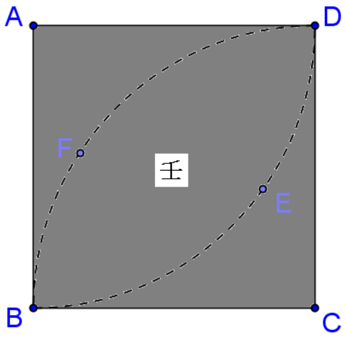


圖 9.2-61(c)-4

=

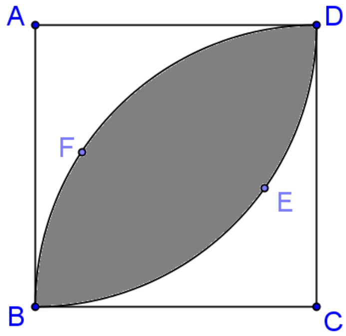


圖 9.2-61(c)-5

解法三：灰色部分面積＝己面積＋庚面積－壬面積

敘述	理由
(1) 圖 9.2-61(c)-1、圖 9.2-61(c)-2 中， 己面積＝庚面積＝25π 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$ & 例題 9.2-45 結論
(2) 圖 9.2-61(c)-1 ＋ 圖 9.2-61(c)-2 ＝圖 9.2-61(c)-3 (圖 9.2-61(c)-3 中，辛面積重疊)	加法
(3) 圖 9.2-61(c)-3 － 圖 9.2-61(c)-4 ＝圖 9.2-61(c)-5 (圖 9.2-61(c)-5 中，灰色面積即為題目所求)	減法
(4) 圖 9.2-61(c)-4 中， 正方形 ABCD 面積(即壬面積) ＝(10 公分)×(10 公分)＝100 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 10 公分的正方形 & 正方形面積為邊長的平方
(5) 題目中灰色部分面積 ＝己面積＋庚面積－壬面積 ＝(25π＋25π－100) 平方公分 ＝(50π－100) 平方公分	由(2) & (3) 代換 由(1) 己面積＝庚面積＝25π 平方公分 & (4) 壬面積＝100 平方公分

例題 9.2-48

圖 9.2-62 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 20 公分的正方形，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$為直徑畫半圓，且此四個半圓弧相交於 O 點，則灰色部分圖形面積為何？

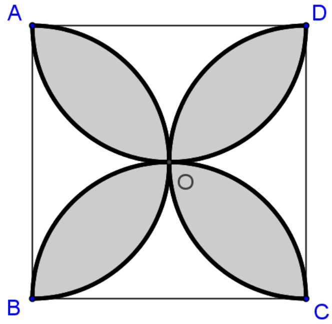


圖 9.2-62

想法：題目中灰色部分面積＝甲面積＋乙面積＋丙面積＋丁面積－壬面積

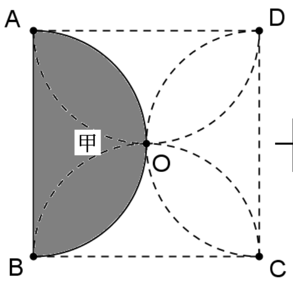


圖 9.2-62(a)-1

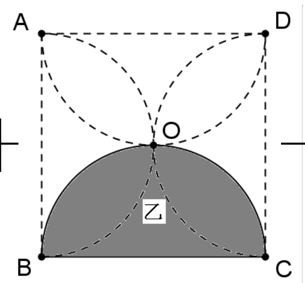


圖 9.2-62(a)-2

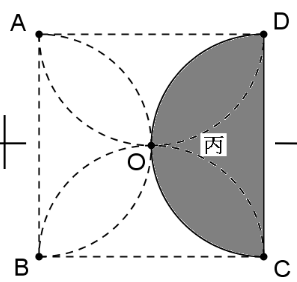


圖 9.2-62(a)-3

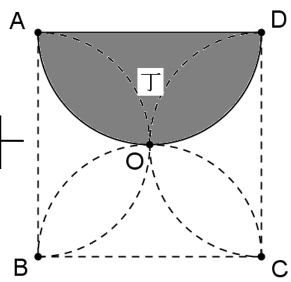


圖 9.2-62(a)-4

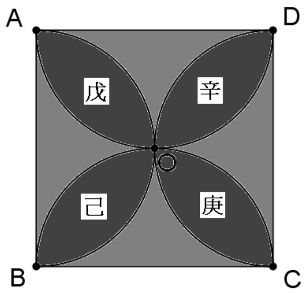


圖 9.2-62(a)-5

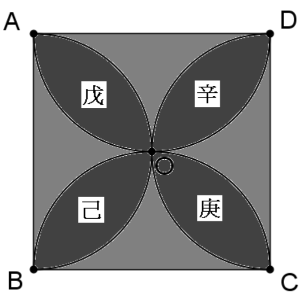


圖 9.2-62(a)-5

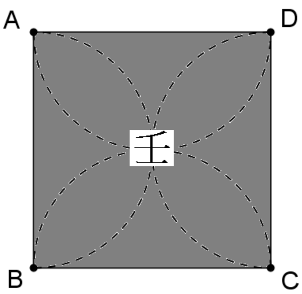


圖 9.2-62a)-6

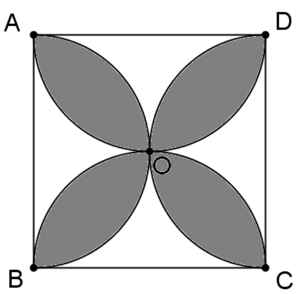


圖 9.2-62(a)-7

解：

敘述	理由
(1) 圖 9.2-62(a)-1＋圖 9.2-62 (a)-2＋圖 9.2-62 (a)-3＋圖 9.2-62 (a)-4 ＝圖 9.2-62(a)-5 (圖 9.2-62 (a)-5 中，戊、己、庚、辛面積重疊)	加法
(2) 圖 9.2-62 (a)-5 － 圖 9.2-62 (a)-6 ＝圖 9.2-62 (a)-7 (圖 9.2-62 (a)-7 中，灰色部分即為題目所求)	減法
(3) 圖 9.2-62 (a)-1 中， 甲面積＝$\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{AB}$為直徑的圓面積) ＝$\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times[\pi\times(\frac{\overline{AB}}{2})^{2}]$ ＝$\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times[\pi\times(\frac{20\text{公分}}{2})^{2}]$ ＝50π 平方公分	如圖 9.2-62 (a)-1 所示， 甲面積為以$\overline{AB}$為直徑的半圓 & 扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 & 半圓的圓心角為 180° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知正方形 ABCD 邊長$\overline{AB}$為 20 公分
(4) 圖 9.2-62 (a)-2 中， 乙面積＝50π平方公分 圖 9.2-62 (a)-3 中， 丙面積＝50π 平方公分 圖 9.2-62 (a)-4 中， 丁面積＝50π 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 20 公分的正方形，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$為直徑畫半圓 & 由(3) 同理可得
(5) 圖 9.2-62 (a)-6 中， 正方形 ABCD 面積(即壬面積) ＝(20 公分)×(20 公分)＝400 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 20 公分的正方形 & 正方形面積為邊長的平方
(6) 題目中灰色部分面積 ＝甲面積＋乙面積＋丙面積＋丁面積－壬面積 ＝$(50\pi+50\pi+50\pi+50\pi-400)$ 平方公分 ＝$(200\pi-400)$ 平方公分	由(1) & (2) 代換 由(3) 甲面積＝50π 平方公分 & (4) 乙面積＝丙面積＝丁面積＝50π 平方公分 & (5) 壬面積＝400 平方公分

例題 9.2-49

圖 9.2-63 中，△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形，以 A 點為圓心，$\overline{AC}$為半徑作扇形 ABC，則圖中灰色部分面積為何？

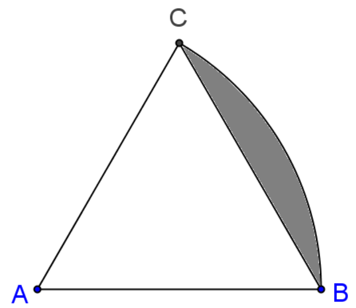


圖 9.2-63

想法：圖中灰色部分面積＝扇形 ABC 面積－△ABC 面積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{AC}=10$ 公分	已知△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形 & 正三角形三邊等長
(2) $\angle A=60^\circ$	已知△ABC 為正三角形 & 正三角形每一內角皆為 60°
(3) 扇形 ABC 面積 $=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AC}$為半徑的圓面積) $=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times[\pi\times(10\text{ 公分})^2]$ $=\dfrac{50}{3}\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (2) 扇形 ABC 圓心角$\angle A=60^\circ$ & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) $\overline{AC}=10$ 公分
(4) △ABC 面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(10\text{ 公分})^2$ $=25\sqrt{3}$ 平方公分	邊長為 a 的正三角形面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ & 已知△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形
(5) 圖中灰色部分面積 ＝扇形 ABC 面積－△ABC 面積 $=(\dfrac{50}{3}\pi-25\sqrt{3})$ 平方公分	如圖 9.2-63 所示 全量等於分量之和 將(3) & (4) 代入

例題 9.2-50

圖 9.2-64 中，△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形，以 A 點為圓心，$\overline{AC}$為半徑作扇形 ABC，以 B 點為圓心，$\overline{BC}$為半徑作扇形 BAC，則圖中灰色部分面積為何？

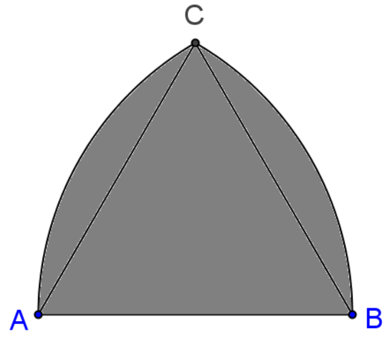


圖 9.2-64

想法：題目所求灰色部分面積＝甲面積＋乙面積－丙面積

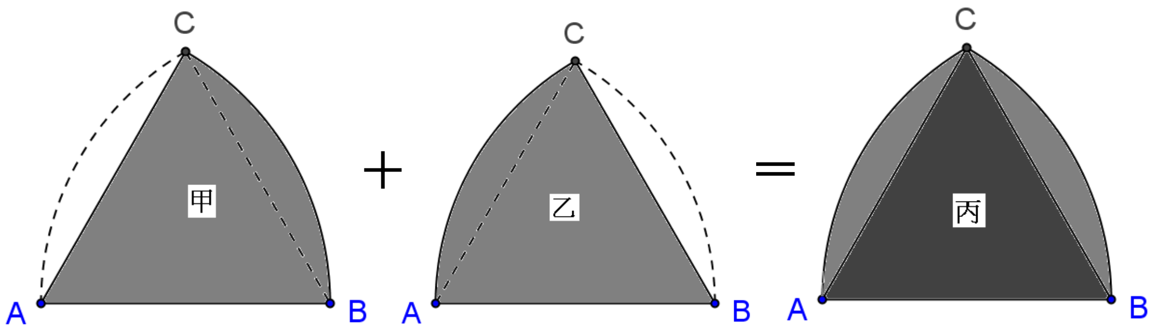


圖 9.2-64(a)-1 **圖 9.2-64(a)-2** **圖 9.2-64(a)-3**

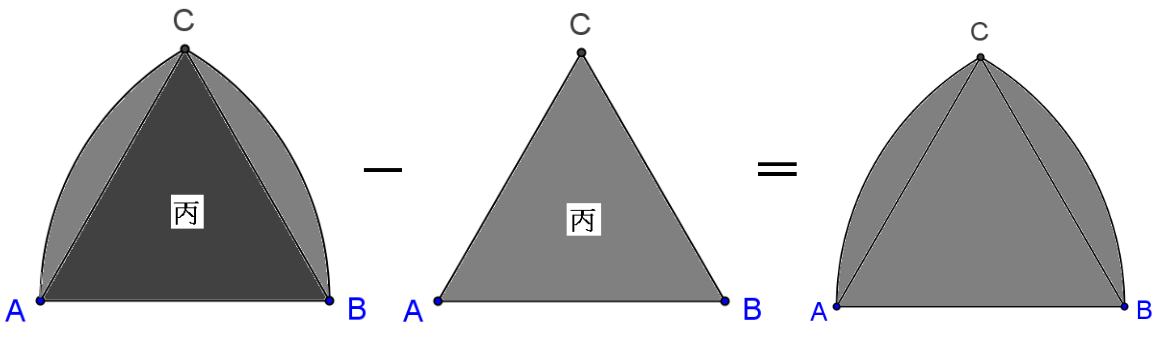


圖 9.2-64(a)-3 **圖 9.2-64(a)-4** **圖 9.2-64(a)-5**

解：

敘述	理由
(1) 圖 9.2-64(a)-1 ＋ 圖 9.2-64 (a)-2 ＝圖 9.2-64 (a)-3 (圖 9.2-64 (a)-3 中，丙面積重疊)	加法
(2) 圖 9.2-64 (a)-3 － 圖 9.2-64 (a)-4 ＝圖 9.2-64 (a)-5 (圖 9.2-64 (a)-5 中，灰色面積即為題目所求)	減法
(3) $\angle A=\angle B=60^\circ$	已知△ABC 為正三角形 ＆ 正三角形每一內角皆為 60°
(4) $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ 公分	已知△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形 ＆ 正三角形三邊等長
(5) 圖 9.2-64 (a)-1 中， 甲面積$=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AC}$為半徑的圓面積) $=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times[\pi\times(10\text{ 公分})^2]$ $=\frac{50}{3}\pi$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 ＆ (3) 扇形 ABC 圓心角$\angle A=60^\circ$ ＆ 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (4) $\overline{AC}=10$ 公分
(6) 圖 9.2-64 (a)-2 中， 乙面積$=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{BC}$為半徑的圓面積) $=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times[\pi\times(10\text{ 公分})^2]$ $=\frac{50}{3}\pi$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 ＆ (3) 扇形 BAC 圓心角$\angle B=60^\circ$ ＆ 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (4) $\overline{BC}=10$ 公分
(7) 圖 9.2-64 (a)-4 中， △ABC 面積(即丙面積) $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(10\text{ 公分})^2=25\sqrt{3}$ 平方公分	邊長為a的正三角形面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ＆ 已知△ABC 為邊長為 10 公分的正三角形
(8) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積＋乙面積－丙面積 $=(\frac{50}{3}\pi+\frac{50}{3}\pi-25\sqrt{3})$ 平方公分 $=(\frac{100}{3}\pi-25\sqrt{3})$ 平方公分	由(1) ＆ (2) 代換 全量等於分量之和 將(5) ＆ (6) ＆ (7) 代入

例題 9.2-51

圖 9.2-65 中，四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

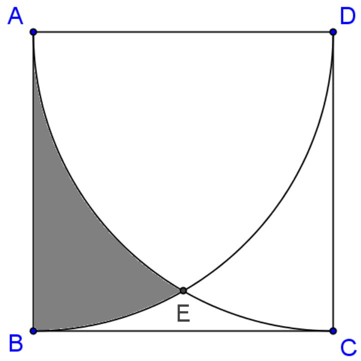


圖 9.2-65

想法：題目所求灰色部分面積＝甲面積－乙面積

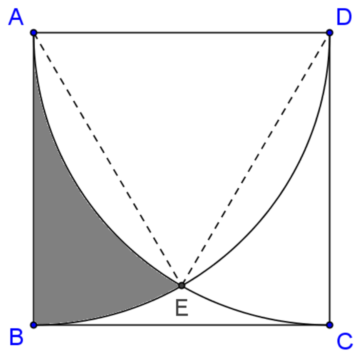


圖 9.2-65(a)

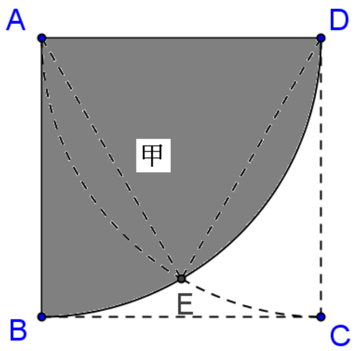


圖 9.2-65(b)-1

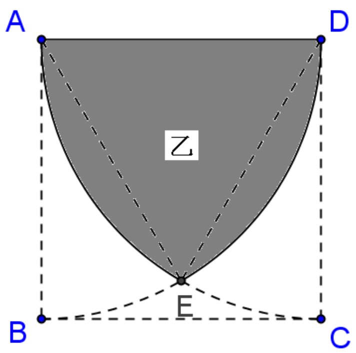


圖 9.2-65(b)-2

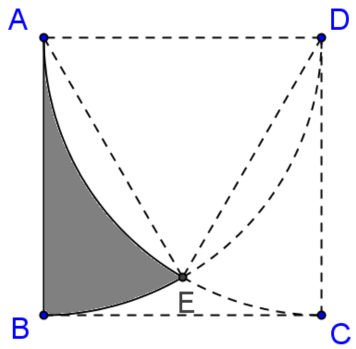


圖 9.2-65(b)-3

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AE}$、$\overline{DE}$，如圖 9.2-65(a)所示	作圖
(2) ∠BAD＝90° & $\overline{AD}$＝10 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形 & 正方形一內角為 90°
(3) $\overline{AE}$＝$\overline{AD}$＝10 公分	已知以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$ & 同圓半徑相等 & (2) $\overline{AD}$＝10 公分
(4) $\overline{DE}$＝$\overline{AD}$＝10 公分	已知，以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$ & 同圓半徑相等 & (2) $\overline{AD}$＝10 公分
(5) $\overline{AE}$＝$\overline{AD}$＝$\overline{DE}$＝10 公分 △ADE 為正三角形	由(3) & (4) 遞移律 等邊三角形為正三角形
(6) 圖 9.2-65 (b)-1 － 圖 9.2-65 (b)-2 ＝圖 9.2-65 (b)-3 (圖 9.2-65 (b)-3 中，灰色部分即為題目所求)	減法
(7) 圖 9.2-65 (b)-1 中 甲面積＝$\frac{90^\circ}{360^\circ}$×(以$\overline{AD}$為半徑的圓面積) ＝$\frac{90^\circ}{360^\circ}$×[π×(10 公分)^2] ＝25π 平方公分	扇形面積＝$\frac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & (2) 扇形 ABD 圓心角∠BAD＝90° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) $\overline{AD}$＝10 公分
(8) 圖 9.2-65 (b)-2 中 乙面積＝($\frac{100}{3}\pi-25\sqrt{3}$) 平方公分	由(5) △ADE 為邊長為 10 公分的正三角形 & 已知以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點 & 利用利題 9.2-50 結論
(9) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積－乙面積 ＝[$25\pi-(\frac{100}{3}\pi-25\sqrt{3})$] 平方公分 ＝($25\sqrt{3}-\frac{25}{3}\pi$) 平方公分	由(6) 將(7) & (8) 代入

例題 9.2-52

圖 9.2-66 中，四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

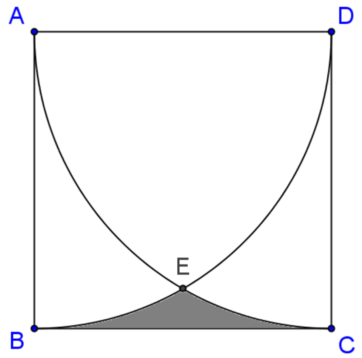


圖 9.2-66

想法：題目所求灰色部分面積＝甲面積－乙面積－丁面積

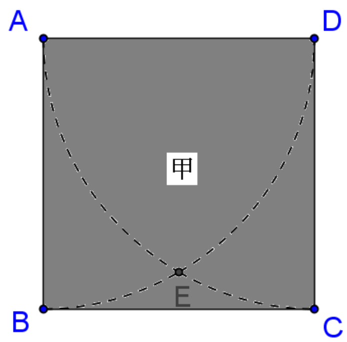


圖 9.2-66 (a)-1

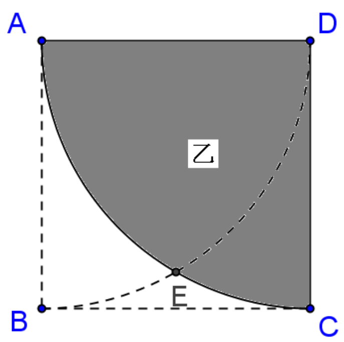


圖 9.2-66 (a)-2

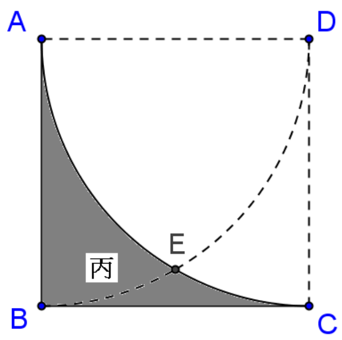


圖 9.2-66 (a)-3

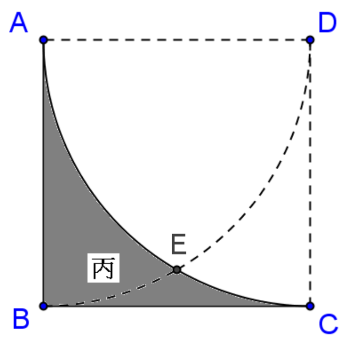


圖 9.2-66 (a)-3

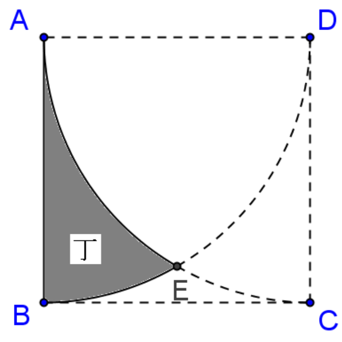


圖 9.2-66 (a)-4

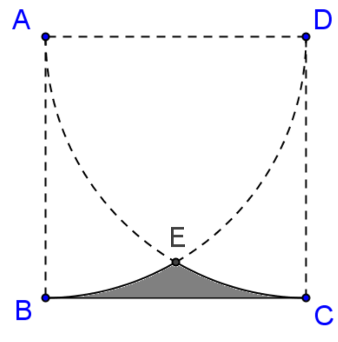


圖 9.2-66 (a)-5

解：

敘述	理由
(1) $\angle ADC=90°$ ＆ $\overline{DA}=10$ 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形 ＆ 正方形一內角為 90°
(2) 圖 9.2-66 (a)-1 － 圖 9.2-66 (a)-2 ＝圖 9.2-66 (a)-3	減法
(3) 圖 9.2-66 (a)-3 － 圖 9.2-66 (a)-4 ＝圖 9.2-66 (a)-5 (圖 9.2-66 (a)-5 中，灰色面積即為題目所求)	減法
(4) 圖 9.2-66 (a)-1 中 正方形 ABCD 面積(即甲面積) $=(10\text{ 公分})^2=100$ 平方公分	正方形面積為邊長的平方 ＆ 已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形
(5) 圖 9.2-66 (a)-2 中 扇形 DAC 面積(即乙面積) $=\dfrac{90°}{360°}\times$(以$\overline{DA}$為半徑的圓面積) $=\dfrac{90°}{360°}\times[\pi\times(10\text{ 公分})^2]$ $=25\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360°}\times$圓面積 ＆ (1) 扇形 DAC 圓心角$\angle ADC=90°$ ＆ 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (1) $\overline{DA}=10$ 公分
(6) 圖 9.2-66 (a)-4 中 丁面積$=(25\sqrt{3}-\dfrac{25}{3}\pi)$ 平方公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 10 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點 ＆ 利用利題 9.2-51 結論
(7) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積－乙面積－丁面積 $=[100-25\pi-(25\sqrt{3}-\dfrac{25}{3}\pi)]$ 平方公分 $=(100-25\sqrt{3}-\dfrac{50}{3}\pi)$ 平方公分	由(2) ＆ (3) 代換 將(4) 甲面積＝100 平方公分 ＆ (5) 乙面積$=25\pi$ 平方公分 ＆ (6) 丁面積$=(25\sqrt{3}-\dfrac{25}{3}\pi)$ 平方公分 代入

例題 9.2-53

圖 9.2-67 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝20 公分、短邊$\overline{AB}$＝10 公分，求灰色部分的圖形面積為何？

圖 9.2-67

想法：灰色部分的圖形面積

＝矩形 ABCD 面積＋以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積＋以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{AB}$ ＝(20 公分)×(10 公分) ＝200 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & 已知矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝20 公分、短邊$\overline{AB}$＝10 公分
(2) $\overline{CD}$＝$\overline{AB}$＝10 公分	已知 ABCD 為矩形 & 矩形兩組對邊等長 & 已知$\overline{AB}$＝10 公分
(3) 以$\overline{AB}$為直徑的圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$ ＝$\overline{AB}$÷2＝(10 公分)÷2＝5 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知$\overline{AB}$＝10 公分
(4) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝$\pi\times\overline{O_1A}^2$＝π×(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (3) 圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝5 公分 已證
(5) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積 ＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×(25π 平方公分) ＝$\dfrac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & 周角為 360° & (4) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積＝25π 平方公分
(6) 以$\overline{CD}$為直徑的圓 O_2 半徑$\overline{O_2C}$ ＝$\overline{CD}$÷2＝(10 公分)÷2＝5 公分	同圓半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{CD}$＝10 公分 已證

(7) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2C}^2=\pi\times(5$ 公分$)^2$ $=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (6) 圓 O_2 半徑$\overline{O_2C}=5$ 公分　已證
(8) 以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\dfrac{25\pi}{2}$ 平方公分	已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & 周角為 360° & (7) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積$=25\pi$ 平方公分
(9) 灰色部分的圖形面積 ＝矩形 ABCD 面積＋ 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積＋ 以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積 $=(200+\dfrac{25\pi}{2}+\dfrac{25\pi}{2})$ 平方公分 $=(200+25\pi)$ 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 矩形 ABCD 面積＝200 平方公分、 (5) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積$=\dfrac{25\pi}{2}$ 平方公分、 (8) 以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積$=\dfrac{25\pi}{2}$ 平方公分

例題 9.2-54

圖 9.2-68 中，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 5 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的面積為何？

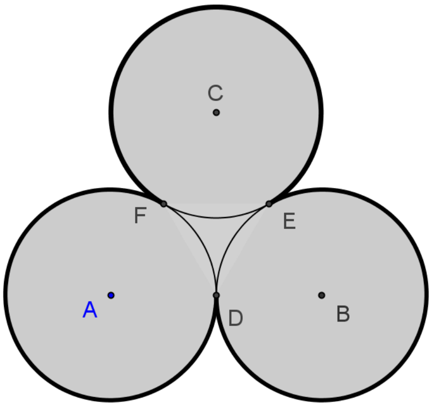


圖 9.2-68

想法：(1) 作$\overline{AB}$、$\overline{BC}$與$\overline{CA}$，則△ABC 為正三角形

(2) 灰色部分的面積＝以優角∠ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積＋
以優角∠DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積＋
以優角∠DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積＋
△ABC 面積

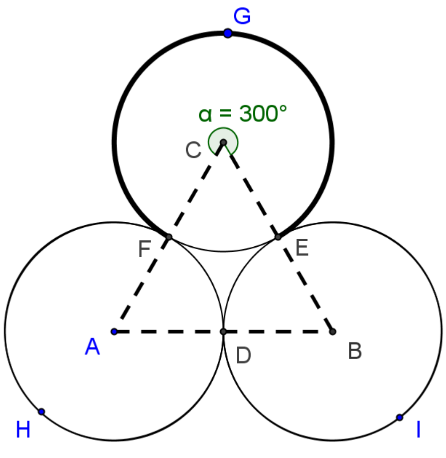


圖 9.2-68(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，如圖 9.2-68(a)其中$\overline{AB}$通過 D 點、$\overline{BC}$通過 E 點、$\overline{CA}$通過 F 點	作圖 & 已知圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點 & 相切兩圓的連心線，必過切點

(2) $\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{CF}$ ＝5 公分	已知圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 5 公分的等圓
(3) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{AD}=\overline{BD}$＝5 公分
(4) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BE}=\overline{CE}$＝5 公分
(5) $\overline{CA}=\overline{CF}+\overline{AF}$ ＝(5 公分)＋(5 公分)＝10 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{CF}=\overline{AF}$＝5 公分
(6) △ABC 為正三角形 ∠A＝∠B＝∠C＝60°	由(3)、(4) & (5) 等邊三角形也是等角三角形
(7) 優角∠ECF＋銳角∠ECF＝360°	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(8) 優角∠ECF＝360°－銳角∠ECF ＝360°－60°＝300°	由(7) 等量減法公理 & (6) 銳角∠ECF＝60°
(9) 圓 C 面積＝$\pi\times\overline{CE}^2$ ＝π×(5 公分)^2 ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 C 半徑$\overline{CE}$＝5 公分
(10) 以優角∠ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積 $=\frac{300^\circ}{360^\circ}$×(圓 C 面積) $=\frac{300^\circ}{360^\circ}$×(25π 平方公分) $=\frac{125\pi}{6}$ 平方公分	由(8) 優角∠ECF＝300° & 周角為 360° & 由(9) 圓 C 面積＝25π 平方公分
(11) 同理可證： 優角∠DAF＝300° 以優角∠DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積＝$\frac{125\pi}{6}$ 平方公分 & 優角∠DBE＝300° 以優角∠DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積＝$\frac{125\pi}{6}$ 平方公分	同(1)~(10) 步驟 同理可證
(12) △ABC 面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$×(10 公分)^2 ＝$25\sqrt{3}$ 平方公分	由(6) & 例題 9.1-19 結論：邊長為 a 單位的正三角形面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$平方單位 & 由(3) $\overline{AB}$＝10 公分

(13) 灰色部分的面積

$=$以優角$\angle$ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積$+$
以優角$\angle$DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積$+$
以優角$\angle$DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積$+\triangle$ABC 面積

$=(\frac{125\pi}{6}$ 平方公分$)+$
$(\frac{125\pi}{6}$ 平方公分$)+$
$(\frac{125\pi}{6}$ 平方公分$)+$
$(25\sqrt{3}$ 平方公分$)$

$=(\frac{125\pi}{2}+25\sqrt{3})$ 平方公分

全量等於分量之和 & (10)、(11)

以優角$\angle$ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積
$=\frac{125\pi}{6}$ 平方公分、
以優角$\angle$DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積
$=\frac{125\pi}{6}$ 平方公分、
以優角$\angle$DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積
$=\frac{125\pi}{6}$ 平方公分 &

(12) $\triangle$ABC 面積$=25\sqrt{3}$ 平方公分

例題 9.2-55

圖 9.2-69 是用三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體，再用一條緞帶環繞此形體一周，則灰色部分面積為何？

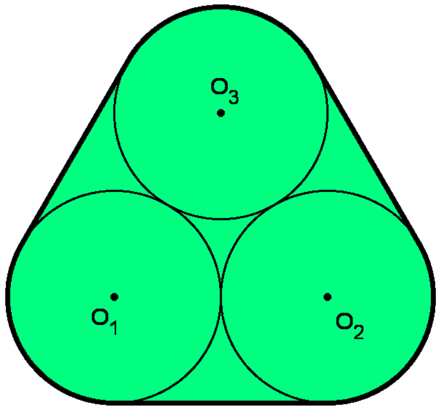


圖 9.2-69

想法：(1) 將灰色部分圖形切分成三角形、扇形與矩形

(2) 灰色部分面積

＝△$O_1O_2O_3$ 面積＋矩形 AO_1O_3F 面積＋矩形 BO_1O_2C 面積＋矩形 DO_2O_3E 面積＋扇形 AO_1B 面積＋扇形 CO_2D 面積＋扇形 EO_3F 面積

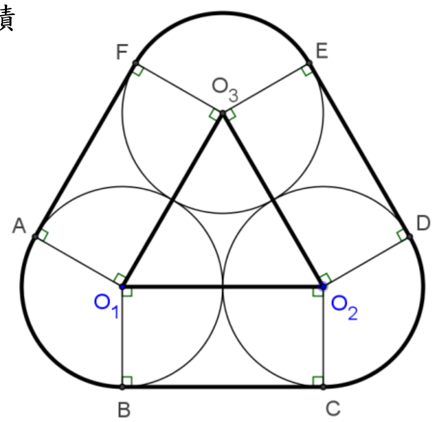


圖 9.2-69(a)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.2-69(a)，在圖形上標出三圓的圓心 O_1、O_2、O_3；再標出圓 O_1 與圓 O_3 外公切線 $\overline{AF}$、圓 O_2 與圓 O_3 外公切線 $\overline{DE}$、圓 O_1 與圓 O_2 外公切線 $\overline{BC}$；連接 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$；其中 $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_2C}=\overline{O_2D}=\overline{O_3E}=\overline{O_3F}=2$ 公分；$\overline{O_1O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	作圖 & 已知圖形為三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體 & 相切兩圓的連心線，必過切點，且連心線長為兩半徑之和

(2) $\triangle O_1O_2O_3$ 為正三角形	由(1)$\overline{O_1O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=4$ 公分 & 正三角形定義
(3) $\triangle O_1O_2O_3$ 面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{O_1O_2}^2$ $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4$ 公分$)^2$ $=4\sqrt{3}$ 平方公分	由(2) & 例題 9.1-19 結論：邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位 & 由(1) $\overline{O_1O_2}=4$ 公分
(4) $\angle AFO_3=\angle FAO_1=\angle FO_3O_1=\angle AO_1O_3=90°$ & 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & $\overline{AF}=\overline{O_1O_3}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(5) 矩形 AO_1O_3F 面積 $=\overline{O_1A}\times\overline{AF}$ $=(2$ 公分$)\times(4$ 公分$)$ $=8$ 平方公分	由(4) 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1)$\overline{O_1A}=2$ 公分、(4) $\overline{AF}=4$ 公分
(6) $\angle BCO_2=\angle CBO_1=\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ & 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & $\overline{BC}=\overline{O_1O_2}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(7) 矩形 BO_1O_2C 面積 $=\overline{O_1B}\times\overline{BC}$ $=(2$ 公分$)\times(4$ 公分$)$ $=8$ 平方公分	由(6) 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1) $\overline{O_1B}=2$ 公分、(6) $\overline{BC}=4$ 公分
(8) $\angle DEO_3=\angle EDO_2=\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ & 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & $\overline{DE}=\overline{O_2O_3}=2\times(2$ 公分$)=4$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(9) 矩形 DO_2O_3E 面積 $=\overline{O_1D}\times\overline{DE}$ $=(2$ 公分$)\times(4$ 公分$)$ $=8$ 平方公分	由(8) 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1) $\overline{O_1D}=2$ 公分、(8)$\overline{DE}=4$ 公分
(10) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1=\angle O_3O_1O_2=60°$	由(2)&正三角形三個內角皆為 60°
(11) $\angle AO_1B+\angle AO_1O_3+\angle BO_1O_2+\angle O_3O_1O_2=360°$ $\angle CO_2D+\angle CO_2O_1+\angle DO_2O_3+\angle O_1O_2O_3=360°$ $\angle EO_3F+\angle EO_3O_2+\angle FO_3O_1+\angle O_2O_3O_1=360°$	如圖 9.2-69(a)所示 全量等於分量之和
(12) $\angle AO_1B$ $=360°-\angle AO_1O_3-\angle BO_1O_2-\angle O_3O_1O_2$ $=360°-90°-90°-60°$ $=120°$	由(11) 等量減法公理 & (4) $\angle AO_1O_3=\angle FO_3O_1=90°$ (6) $\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ (8) $\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ &

$\angle CO_2D$
$=360°-\angle CO_2O_1-\angle DO_2O_3-\angle O_1O_2O_3$
$=360°-90°-90°-60°=120°$
$\angle EO_3F$
$=360°-\angle EO_3O_2-\angle FO_3O_1-\angle O_2O_3O_1$
$=360°-90°-90°-60°=120°$

(10) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1$
$=\angle O_3O_1O_2=60°$

(13) AO_1B 與 CO_2D 與 EO_3F 皆為圓心角為 120° 的扇形

由(12) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$ 皆為圓半徑

(14) 圓 O_1 面積＝圓 O_2 面積＝圓 O_3 面積
$=\pi\times(2\text{ 公分})^2=4\pi$ 平方公分

圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圖形為三個半徑皆為 2 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體

(15) 扇形 AO_1B 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_1 面積)
$=\frac{120°}{360°}\times(4\pi\text{ 平方公分})=\frac{4\pi}{3}$ 平方公分

由(13) AO_1B 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° &
(14) 圓 O_1 面積＝4π 平方公分

(16) 扇形 CO_2D 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_2 面積)
$=\frac{120°}{360°}\times(4\pi\text{ 平方公分})=\frac{4\pi}{3}$ 平方公分

由(13) CO_2D 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° &
(14) 圓 O_2 面積＝4π 平方公分

(17) 扇形 EO_3F 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_3 面積)
$=\frac{120°}{360°}\times(4\pi\text{ 平方公分})=\frac{4\pi}{3}$ 平方公分

由(13) EO_3F 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° &
(14) 圓 O_3 面積＝4π 平方公分

(18) 灰色部分面積
＝$\triangle O_1O_2O_3$ 面積＋矩形 AO_1O_3F 面積＋矩形 BO_1O_2C 面積＋矩形 DO_2O_3E 面積＋扇形 AO_1B 面積＋扇形 CO_2D 面積＋扇形 EO_3F 面積
$=(4\sqrt{3}+8+8+8+\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})$平方公分
$=(24+4\pi+4\sqrt{3})$ 平方公分

全量等於分量之和 &
(3)$\triangle O_1O_2O_3$ 面積＝$4\sqrt{3}$ 平方公分
(5)矩形 AO_1O_3F 面積＝8 平方公分
(7)矩形 BO_1O_2C 面積＝8 平方公分
(9)矩形 DO_2O_3E 面積＝8 平方公分
(15)扇形 AO_1B 面積＝$\frac{4\pi}{3}$ 平方公分
(16)扇形 CO_2D 面積＝$\frac{4\pi}{3}$ 平方公分
(17)扇形 EO_3F 面積＝$\frac{4\pi}{3}$ 平方公分

接下來，讓我們運用圓面積定理，以及第八章所學的畢氏定理，來練習以下

例題 9.2-56~例題 9.2-57。

例題 9.2-56

已知：△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙。

求證：甲面積＋乙面積＝丙面積

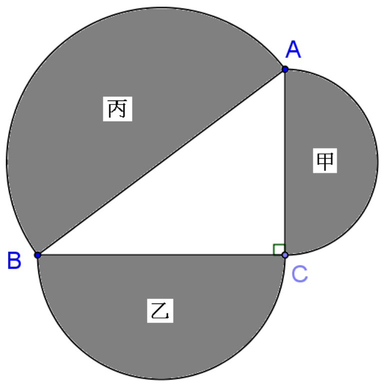


圖 9.2-70

想法：利用畢氏定理與扇形面積證明

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90° & 畢氏定理
(2) 甲面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AC}$為直徑的圓面積) $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times[\pi\times\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2]$ $=\frac{\overline{AC}^2}{8}\pi$	已知甲為以$\overline{AC}$為直徑的半圓 & 扇形面積＝$\frac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & 半圓圓心角為 180° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積
(3) 乙面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{BC}$為直徑的圓面積) $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times[\pi\times\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2]$ $=\frac{\overline{BC}^2}{8}\pi$	已知乙為以$\overline{BC}$為直徑的半圓 & 扇形面積＝$\frac{圓心角度數}{360^\circ}$×圓面積 & 半圓圓心角為 180° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積
(4) 丙面積	已知丙為以$\overline{AB}$為直徑的半圓 &

$=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{AB}$為直徑的圓面積)	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 &
$=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times[\pi\times\left(\dfrac{\overline{AB}}{2}\right)^2]$	半圓圓心角為 180° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積
$=\dfrac{\overline{AB}^2}{8}\pi$	
(5) 甲面積＋乙面積	由(2) 式＋(3) 式
$=\dfrac{\overline{AC}^2}{8}\pi+\dfrac{\overline{BC}^2}{8}\pi$	
$=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}{8}\pi$	由(1) $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$
$=\dfrac{\overline{AB}^2}{8}\pi=$丙面積	由(4)
(6) 所以甲面積＋乙面積＝丙面積	由(5) 已證

Q. E. D.

例題 9.2-57

圖 9.2-71 中，△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙，若甲面積為 18π 平方公分，乙面積為 32π 平方公分，則丙面積為何？

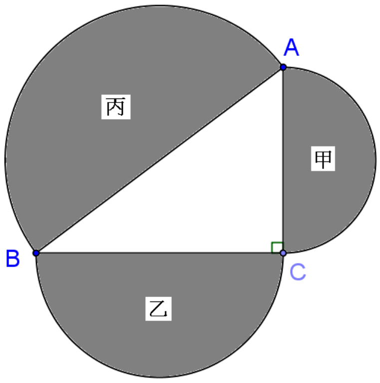


圖 9.2-71

想法：利用例題 9.2-56 結論：甲面積＋乙面積＝丙面積

解：

敘述	理由
(1) 丙面積＝甲面積＋乙面積 ＝(18π＋32π) 平方公分 ＝50π 平方公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙，甲面積為 18π 平方公分，乙面積為 32π 平方公分 & 利用例題 9.2-56 結論

接下來，讓我們運用圓面積定理，再配合上第七章定理 7.2-5：垂直於弦的直徑定理；以及第八章所學的畢氏定理，來練習以下例題 9.2-58~例題 9.2-59。

例題 9.2-58

如圖 9.2-72，已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝8 公分，弦心距$\overline{OC}$＝3 公分，則圓 O 面積為何？

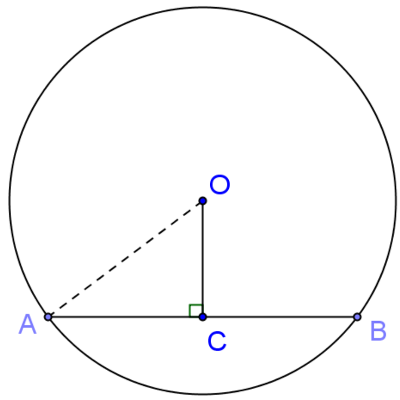


圖 9.2-72

想法：(1) 利用畢氏定理求出圓 O 半徑

(2) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OC}\perp\overline{AB}$，∠OCA＝90°	已知$\overline{OC}$為弦心距
(2) △ACO 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) C 點為$\overline{AB}$中點， $\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times$(8 公分)＝4 公分	由(1) & 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OC}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知弦$\overline{AB}$＝8 公分
(4) △ACO 中， $\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2$	由(2) △ACO 為直角三角形 & 畢氏定理
(5) $\overline{OA}^2$＝(4 公分)^2＋(3 公分)^2 ＝25 平方公分	由(4) & 已知$\overline{OC}$＝3 公分 & (3) $\overline{AC}$＝4 公分
(6) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝π×(25 平方公分) ＝25π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(5) $\overline{OA}^2$＝25 平方公分 已證

例題 9.2-59

如圖 9.2-73，$\overline{AB}$ 為兩同心圓中大圓的弦，交小圓於 C、D。若 $\overline{AB}$＝20 公分，$\overline{CD}$＝14 公分，求兩圓所圍的灰色環狀區域面積。

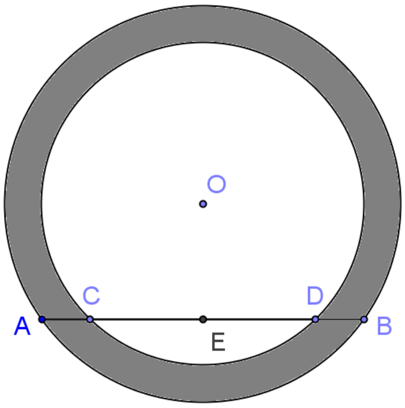


圖 9.2-73

想法：(1) 灰色環狀區域面積＝以$\overline{OA}$為半徑的圓面積－以$\overline{OC}$為半徑的圓面積

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{OA}$與$\overline{OC}$

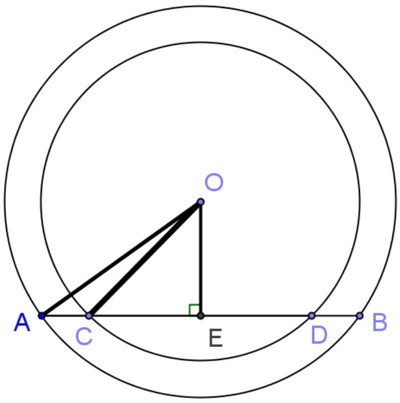


圖 9.2-73(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OA}$、$\overline{OC}$，並作$\overline{OE}\perp\overline{AB}$，如圖 9.2-73(a)所示，則∠OEA＝90° $\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times$(20 公分) ＝10 公分 $\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times$(14 公分) ＝7 公分	作圖 & 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OE}$垂直平分$\overline{AB}$ & $\overline{OE}$垂直平分$\overline{CD}$ & 已知$\overline{AB}$＝20 公分、$\overline{CD}$＝14 公分
(2) △AEO 為直角三角形 $\overline{OA}^2=\overline{AE}^2+\overline{OE}^2$ ＝(10 公分)$^2+\overline{OE}^2$	由(1) ∠OEA＝90° 直角三角形定義 & 畢氏定理 由(1) $\overline{AE}$＝10 公分 已證

$=100$ 平方公分$+\overline{OE}^2$	
(3) △CEO 為直角三角形 $\overline{OC}^2=\overline{CE}^2+\overline{OE}^2$ $=(7$ 公分$)^2+\overline{OE}^2$ $=49$ 平方公分$+\overline{OE}^2$	由(1) $\angle OEA=90°$ 直角三角形定義 & 畢氏定理 由(1) $\overline{CE}=7$ 公分　已證
(4) 以$\overline{OA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{OA}^2$ $=\pi\times(100$ 平方公分$+\overline{OE}^2)$ $=100\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi$	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) $\overline{OA}^2=100$ 平方公分$+\overline{OE}^2$ 已證
(5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{OC}^2$ $=\pi\times(49$ 平方公分$+\overline{OE}^2)$ $=49\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi$	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (3) $\overline{OC}^2=49$ 平方公分$+\overline{OE}^2$ 已證
(6) 灰色環狀區域面積 $=$以$\overline{OA}$為半徑的圓面積$-$ 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 $=(100\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi)-$ $(49\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi)$ $=51\pi$ 平方公分	題目所求 全量等於分量之和 & (4) 以$\overline{OA}$為半徑的圓面積 $=100\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi$　已證 (5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 $=49\pi$ 平方公分$+\overline{OE}^2\pi$　已證

接下來，讓我們運用圓面積定理，配合第四章例題 4.3-2 結論：若 I 點為$\triangle ABC$的內心，則$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$；再結合第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2；以及第八章所學的畢氏定理，來練習以下例題 9.2-60~例題 9.2-61。

例題 9.2-60

如圖 9.2-74，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$。若 $\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BC}$＝6 公分，求圓 I 的面積。

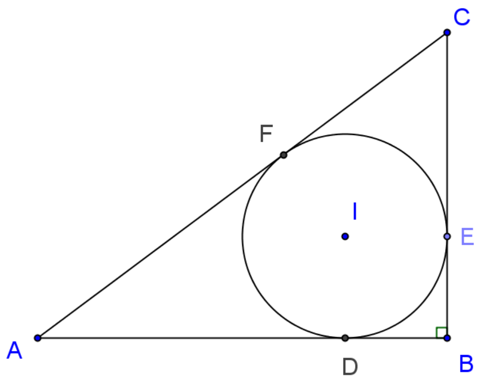


圖 9.2-74

想法：(1) 先利用畢氏定理求出直角三角形的斜邊長

(2) 再利用第七章例題 7.3-11 的結論：
直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2
求出直角三角形內切圓半徑

(3) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

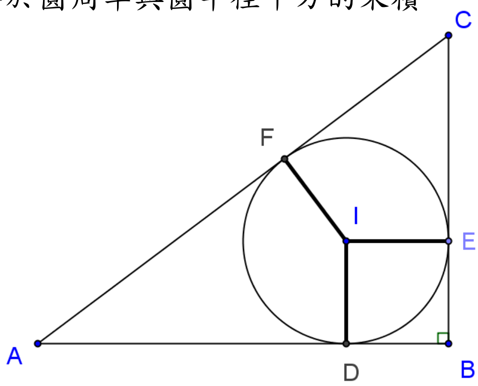


圖 9.2-74(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{ID}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$如圖 9.2-74(a)，則$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$為圓 I 半徑	作圖 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點
(2) 直角三角形 ABC 中 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ $=(8$ 公分$)^2+(6$ 公分$)^2$ $=64$ 平方公分$+36$ 平方公分 $=100$ 平方公分	畢氏定理 & 已知直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}=8$ 公分，$\overline{BC}=6$ 公分
(3) $\overline{AC}=10$ 公分 或 $\overline{AC}=-10$ 公分	由(2) 求平方根
(4) $\overline{AC}=10$ 公分	由(3) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$ $=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$ $=\dfrac{8\text{公分}+6\text{公分}-10\text{公分}}{2}$ $=2$ 公分	由(1) $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$為圓 I 半徑 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}=8$ 公分，$\overline{BC}=6$ 公分 & 由(4) $\overline{AC}=10$ 公分 已證
(6) 圓 I 的面積$=\pi\times\overline{ID}^2$ $=\pi\times(2$ 公分$)^2$ $=4\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}=2$ 公分

例題 9.2-61

如圖 9.2-75，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分，試求△ABC 內切圓的面積。

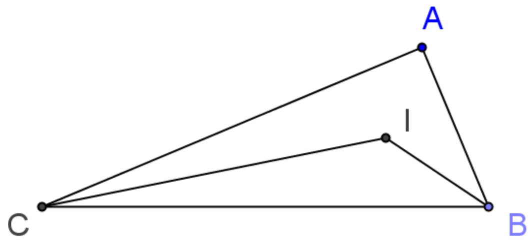


圖 9.2-75

想法：(1) 利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC，求出∠BAC＝90°(即△ABC 為直角三角形)

(2) 利用畢氏定理求出直角三角形的第三邊

(3) 利用第七章例題 7.3-11 的結論：
直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2
求出直角三角形內切圓半徑

(4) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) ∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	已知 I 點為△ABC 的內心 & 利用例題 4.3-2 結論
(2) 135°＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	由(1) & 已知∠BIC＝135°
(3) ∠BAC＝(135°－90°)x2＝90°	由(2) 求∠BAC 之值
(4) △ABC 為直角三角形 $\overline{BC}^2$＝$\overline{AB}^2$＋$\overline{AC}^2$	由(3) & 直角三角形定義 & 畢氏定理
(5) $\overline{BC}^2$＝(5 公分)^2＋(12 公分)^2 ＝25 平方公分＋144 平方公分 ＝169 平方公分	由(4) & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分
(6) $\overline{BC}$＝13 公分 或 $\overline{BC}$＝－13 公分	由(5) 求平方根
(7) $\overline{BC}$＝13 公分	由(6) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(8) △ABC 內切圓半徑 ＝$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ ＝$\dfrac{5公分+12公分-13公分}{2}$＝2 公分	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論 & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分 & (7) $\overline{BC}$＝13 公分 已證

(9) △ABC 內切圓的面積 $=\pi\times(\triangle ABC$ 內切圓半徑$)^2$ $=\pi\times(2$ 公分$)^2$ $=4\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (8) △ABC 內切圓半徑＝2 公分 已證

定理 9.2-11 圓面積比定理

兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比。

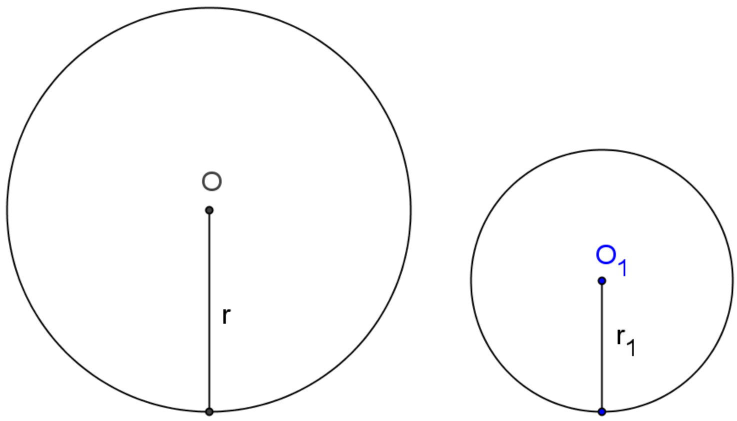


圖 9.2-76

已知：如圖 9.2-76，圓 O 與圓 O_1 的半徑分別為 r 與 r_1

求證： 圓 O 面積：圓 O_1 面積＝ r^2：r_1^2

想法：利用圓面積定理

證明：

敘述	理由
(1) 圓 O 面積＝$\pi\times r^2$	已知圓 O 的半徑為 r & 圓面積定理
(2) 圓 O_1 面積＝$\pi\times r_1^2$	已知圓 O_1 的半徑為 r_1 & 圓面積定理
(3) 圓 O 面積：圓 O_1 面積 $=\pi\times r^2：\pi\times r_1^2=r^2：r_1^2$	由(1) & (2) 倍比定理
(4) 所以圓 O 面積：圓 O_1 面積＝ r^2：r_1^2	由(3) 已證

Q. E. D.

例題 9.2-62

已知有甲、乙兩個圓，甲圓半徑為 3 公分、乙圓半徑為 5 公分，則：

(1) 甲圓周長與乙圓周長之比為何？

(2) 甲圓面積與乙圓面積之比為何？

想法：(1) 定理 9.2-6 圓周比定理：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比

(2) 定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 甲圓周長：乙圓周長 ＝(3 公分)：(5 公分) ＝3：5	兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比 & 已知甲圓半徑為 3 公分、乙圓半徑為 5 公分 & 倍比定理
(2) 甲圓面積：乙圓面積 ＝$(3\text{ 公分})^2$：$(5\text{ 公分})^2$ ＝9：25	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 已知甲圓半徑為 3 公分、乙圓半徑為 5 公分 & 倍比定理

例題 9.2-63

圖 9.2-77 中，$\overline{AB}$為圓 O_1 的直徑，$\overline{AO_1}$為圓 O_2 的直徑，已知$\overline{AB}$＝8 公分、$\overline{AO_1}$＝4 公分，則圓 O_1 面積是圓 O_2 的幾倍？

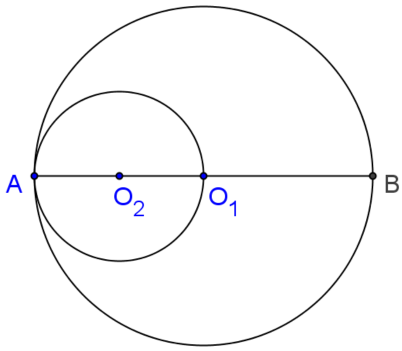


圖 9.2-77

想法：定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 圓 O_1 的半徑 ＝$\overline{AB}$÷2 ＝(8 公分)÷2＝4 公分	已知$\overline{AB}$＝8 公分為圓 O_1 的直徑 & 同圓半徑為直徑的一半
(2) 圓 O_2 的半徑 ＝$\overline{AO_1}$÷2 ＝(4 公分)÷2＝2 公分	已知$\overline{AO_1}$＝4 公分為圓 O_1 的直徑 & 同圓半徑為直徑的一半
(3) 圓 O_1 面積：圓 O_2 面積 ＝(4 公分)^2：(2 公分)^2 ＝4：1	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 由(1) 圓 O_1 的半徑＝4 公分、 (2) 圓 O_2 的半徑＝2 公分 & 倍比定理
(4) 圓 O_1 面積＝4×圓 O_2 面積	由(3) & 外項乘積等於內項乘積
(5) 圓 O_1 面積是圓 O_2 的 4 倍	由(4) 已證

例題 9.2-64

已知圓 O_1 半徑：圓 O_2 半徑＝3：4，若圓 O_1 面積為 18π 平方公分，則圓 O_2 面積為何？

想法： 定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 假設圓 O_1 半徑＝3r 圓 O_2 半徑＝4r	已知圓 O_1 半徑：圓 O_2 半徑＝3：4 & 假設
(2) 圓 O_1 面積：圓 O_2 面積 ＝$(3\,r)^2 : (4r)^2$ ＝9：16	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 由(1) 假設 & 倍比定理
(3) 9×圓 O_2 面積＝16×圓 O_1 面積	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) 圓 O_2 面積＝$\frac{16}{9}$×圓 O_1 面積 ＝$\frac{16}{9}$×(18π 平方公分) ＝32π 平方公分	由(3) 等式兩邊同除以 9 & 已知圓 O_1 面積為 18π 平方公分

習題 9.2

習題 9.2-1

如圖 9.2-78，ABCDEF 為邊長為 4 公分的正六邊形，O 點為其中心，已知此正六邊形內切圓半徑為 $2\sqrt{3}$ 公分，求正六邊形 ABCDEF 面積為何？

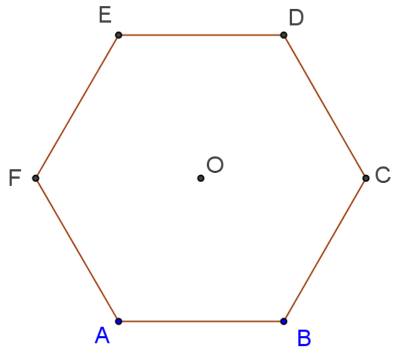


圖 9.2-78

習題 9.2-2

若 ABCDEFGH 為一邊長為 4 公分、面積為 96 平方公分的正八邊形，求此正八邊形內切圓半徑為何？

習題 9.2-3

如圖 9.2-79，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 分別為邊長為 6 公分及 4 公分的正六邊形，O 點與 O_1 點分別為其中心，$\overline{OG}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1G_1}\perp\overline{A_1B_1}$，則：

(1) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=$？　　(2) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=$？

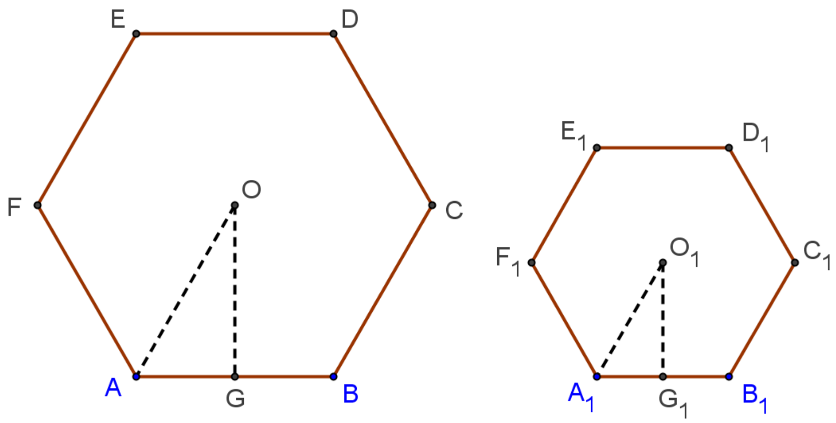


圖 9.2-79

習題 9.2-4

如圖 9.2-80，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 皆為正六邊形，已知正六邊形 ABCDEF 邊長為 8 公分、面積為 $96\sqrt{3}$ 平方公分，正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，且 $\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑，$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距，則：

(1) $\overline{A_1B_1}$＝？　　(2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}$＝？　　(3) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}$＝？

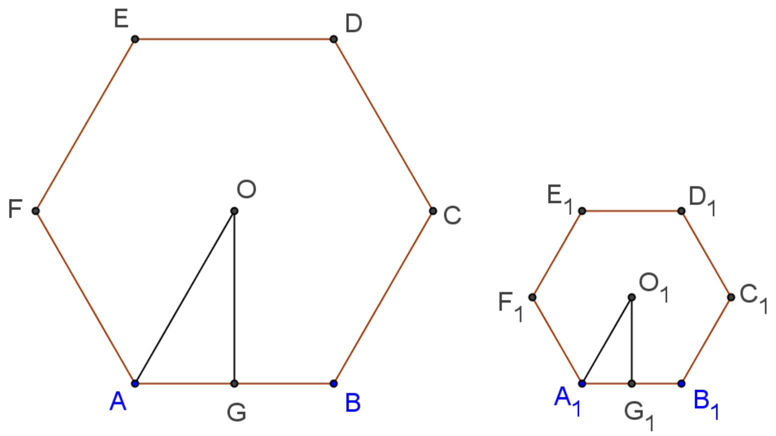


圖 9.2-80

習題 9.2-5

已知圓 O 半徑為 6 公分、圓 O_1 半徑為 4 公分，求圓 O 與圓 O_1 周長之比。

習題 9.2-6

如圖 9.2-81，已知圓 O 半徑 $\overline{OA}$＝5 公分，則圓 O 周長為何？

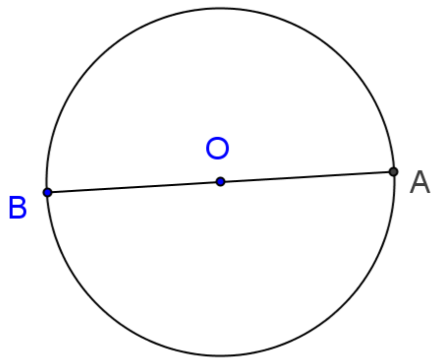


圖 9.2-81

習題 9.2-7

圖 9.2-82 中，圓 O_1 與圓 O_2 內切，且圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑，已知 $\overline{O_2A}=4$ 公分，求圓 O_1 的周長為何？

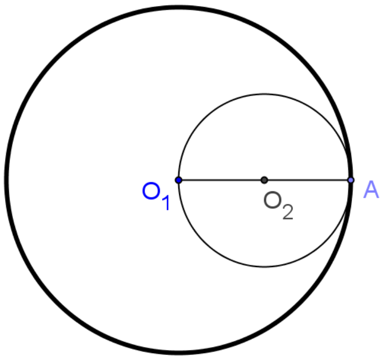


圖 9.2-82

習題 9.2-8

圖 9.2-83 中，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在 $\overline{AD}$ 上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}=15$ 公分，求圓 O_3 的周長為何？

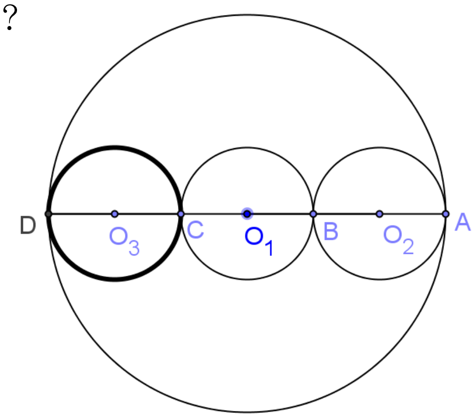


圖 9.2-83

習題 9.2-9

圖 9.2-84 中，正方形 ABCD 和圓 O 的周長相同，若正方形 ABCD 邊長為 20π 公分，請問圓 O 的半徑是多少？

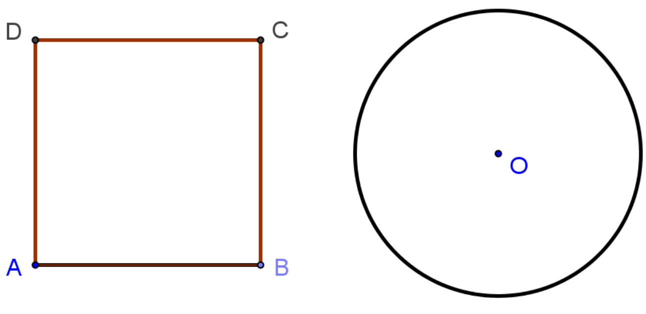


圖 9.2-84

習題 9.2-10

圖 9.2-85 中，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，已知正方形 ABCD 的周長為 16 公分，則圓 O 的周長是多少公分？

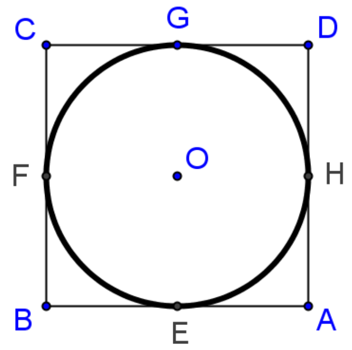


圖 9.2-85

習題 9.2-11

如圖 9.2-86，已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝24 公分，弦心距$\overline{OC}$＝5 公分，則圓 O 周長為何？

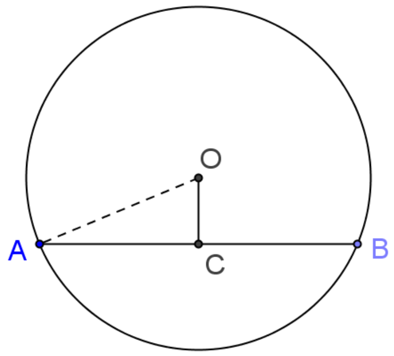


圖 9.2-86

習題 9.2-12

如圖 9.2-87，圓 O 半徑為 10 公分，圓心角∠AOB＝120°，則：

(1) 圓 O 周長＝？　(2) $\overset{\frown}{AB}$＝？　(3) $\overset{\frown}{ACB}$＝？

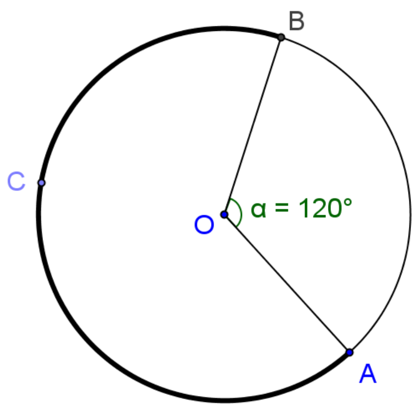


圖 9.2-87

習題 9.2-13

如圖 9.2-88，圓 O 半徑為 5 公分，$\overset{\frown}{AB}=4\pi$ 公分，則：

(1) 圓 O 周長＝？　　(2) 圓心角$\angle AOB$＝？　　(3) $\overset{\frown}{ACB}$＝？

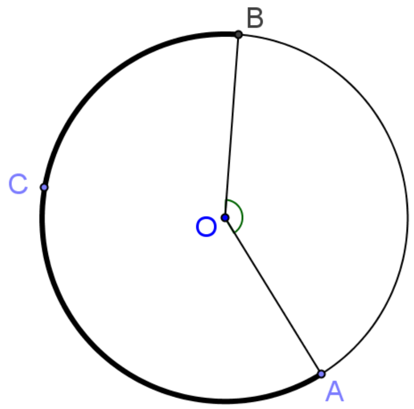


圖 9.2-88

習題 9.2-14

圖 9.2-89 中，OAB 為半徑為 5 公分、圓心角為 144°的扇形，求扇形 OAB 的周長為何？

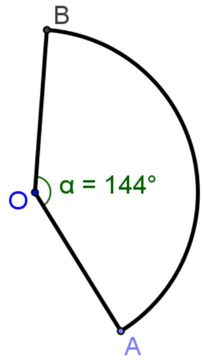


圖 9.2-89

習題 9.2-15

圖 9.2-90 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=2$ 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}=4$ 公分，請問著色部分的圖形周長是多少公分？

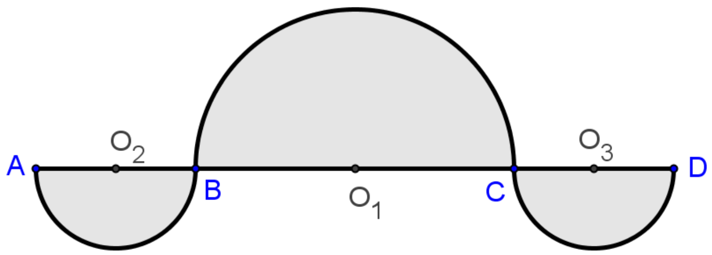


圖 9.2-90

習題 9.2-16

圖 9.2-91 中，圓 O_1 與 O_2 為兩半徑為 6 公分的等圓，已知兩圓相交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 的圓周之上、O_2 在圓 O_1 的圓周之上，求灰色部分的周長為何？

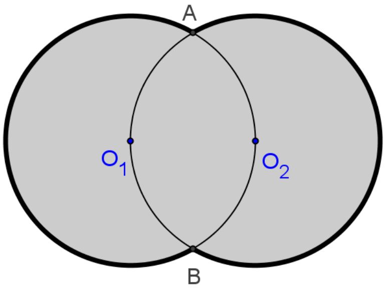


圖 9.2-91

習題 9.2-17

圖 9.2-92 中，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的周長為何？

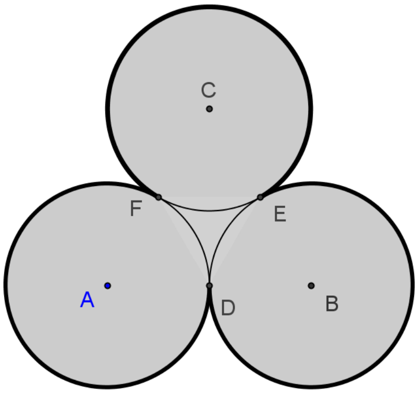


圖 9.2-92

習題 9.2-18

圖 9.2-93 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個邊為直徑畫半圓所形成的圖形，且四個半圓相交於 O 點，若正方形邊長為 6 公分，求灰色部分圖形的周長為何？

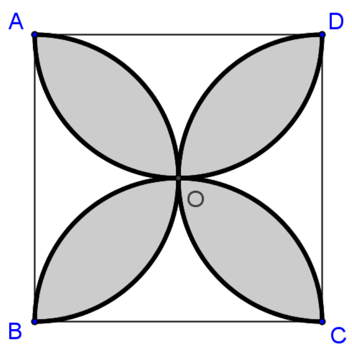


圖 9.2-93

習題 9.2-19

圖 9.2-94 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個頂點為圓心，正方形邊長為半徑畫弧所形成的圖形，且四個弧分別相交於 E、F、G、H 四點，若正方形邊長為 10 公分，求粗線部分圖形的周長為何？

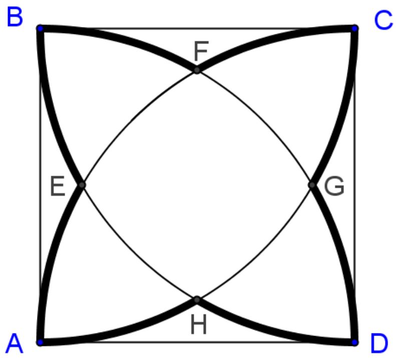


圖 9.2-94

習題 9.2-20

圖 9.2-95 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝16 公分、短邊$\overline{AB}$＝8 公分，求灰色部分的圖形周長為何？

圖 9.2-95

習題 9.2-21

圖 9.2-96 中，圓 O_1 與圓 O_2 外切，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為兩圓的外公切線，已知兩圓半徑皆為 5 公分，若想用一線段圍繞兩圓，則此線段至少需多少公分？

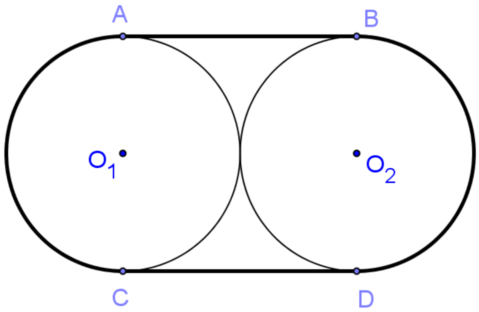


圖 9.2-96

習題 9.2-22

圖 9.2-97 是用三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體。若想用一條緞帶環繞此形體一周，則此緞帶至少需要___________cm。

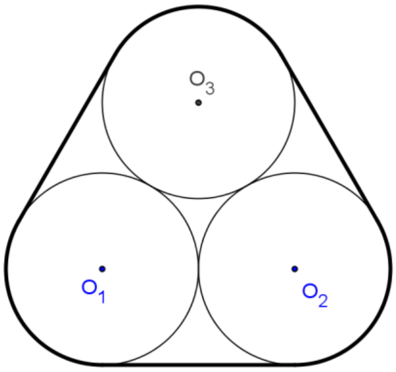


圖 9.2-97

習題 9.2-23

圖 9.2-98 中，圓 O 為半徑 6 公分的圓，求圓 O 面積為何？

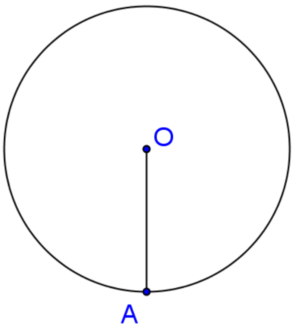


圖 9.2-98

習題 9.2-24

圖 9.2-99 中，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在 $\overline{AD}$ 上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}=15$ 公分，求灰色部分圖形的面積為何？

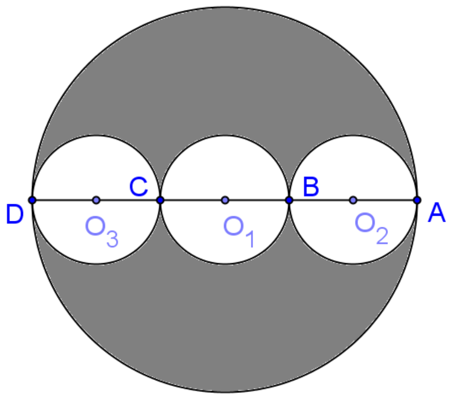


圖 9.2-99

習題 9.2-25

如圖 9.2-100，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為四個切點，若正方形 ABCD 邊長為 16 公分，則灰色部分圖形面積為何？

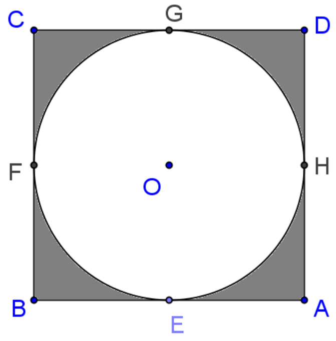


圖 9.2-100

習題 9.2-26

如圖 9.2-101，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=6$ 公分。
若∠AOB＝144°，則：

(1) 灰色部分為何圖形？
(2) 灰色部分為圓 O 的幾倍？
(3) 灰色部分的面積為何？

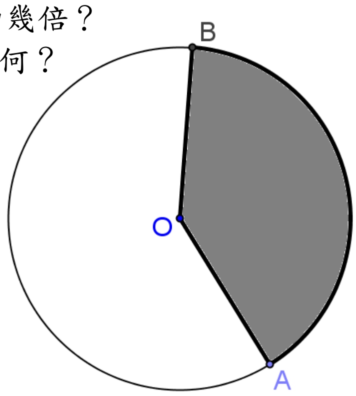


圖 9.2-101

習題 9.2-27

圖 9.2-102 中，兩同心圓的半徑 $\overline{OA}=8$ 公分，$\overline{OC}=5$ 公分，且∠AOB＝120°，則灰色部分面積為何？

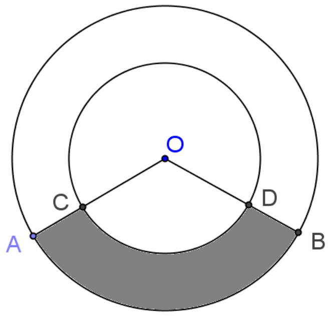


圖 9.2-102

習題 9.2-28

圖 9.2-103 中，兩同心圓的半徑$\overline{OA}$＝12 公分，$\overline{OC}$＝5 公分。

若 $\overset{\frown}{AB}$＝8π 公分，則：

(1) $\overset{\frown}{CD}$＝？

(2) 灰色部分面積為何？

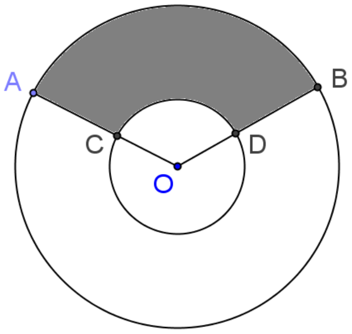


圖 9.2-103

習題 9.2-29

圖 9.2-104 為兩個半徑同為 8 公分的半圓外切所形成的圖形，求此圖形的面積為何？

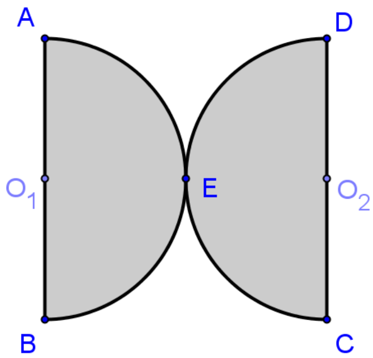


圖 9.2-104

習題 9.2-30

圖 9.2-105 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}$＝$\overline{O_3C}$＝6 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}$＝12 公分，請問著色部分的圖形面積為何？

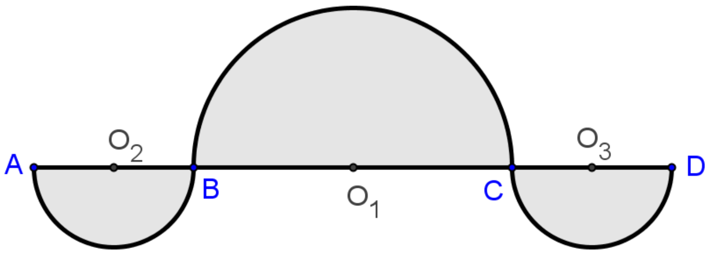


圖 9.2-105

習題 9.2-31

圖 9.2-106 中，大的半圓的圓心為 D 點、直徑為$\overline{AB}$；小圓的圓心為 C 點、直徑為$\overline{DE}$。且小圓與半圓相切於 E 點，若$\overline{AB}$＝16 公分，則灰色部分圖形面積為何？

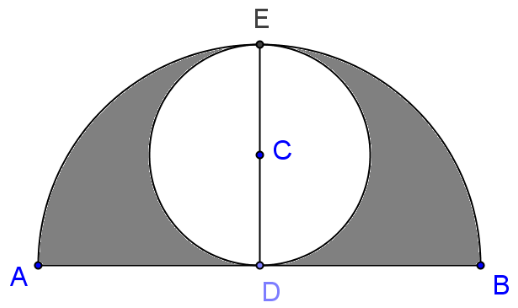


圖 9.2-106

習題 9.2-32

圖 9.2-107 中，大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$；三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$；已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$，且$\overline{AD}$＝30 公分，則灰色部分圖形面積為何？

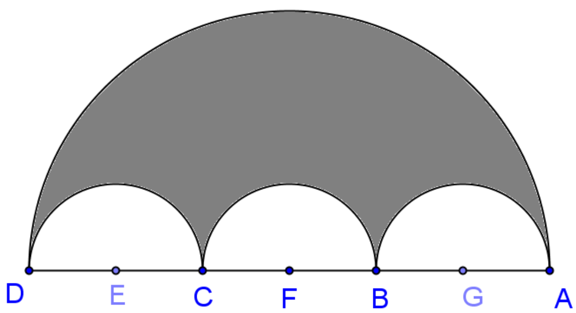


圖 9.2-107

習題 9.2-33

圖 9.2-108 中，$\overline{BD}$為圓 A 的直徑，分別以圓 O 半徑$\overline{AB}$與$\overline{AD}$為直徑畫兩半圓，其圓心分別為 C 點與 E 點，已知$\overline{BD}$＝12 公分，則灰色部分圖形面積為何？

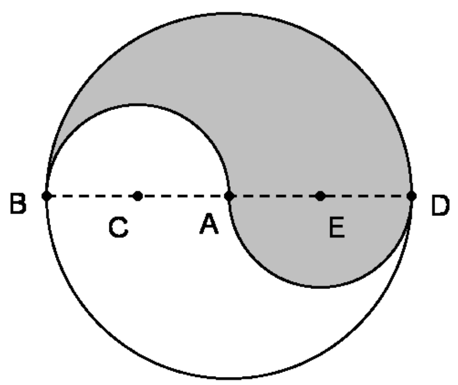


圖 9.2-108

習題 9.2-34

平面上有 A、C 兩點，若分別以 A、C 為圓心，以$\overline{AC}$為半徑畫兩圓，且$\overleftrightarrow{AC}$分別交兩圓於 B、D 兩點，再分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑畫兩半圓，如圖 9.2-109 所示，已知$\overline{AC}$＝8 公分，則灰色部分圖形面積為何？

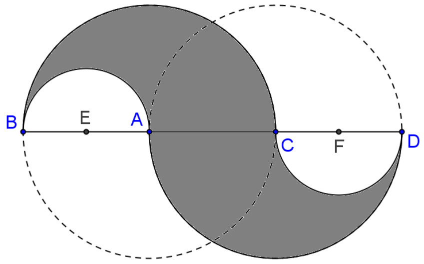


圖 9.2-109

習題 9.2-35

如圖 9.2-110，圓 O 中，∠AOB＝45°、∠COD＝60°、∠EOF＝150°，若圓 O 半徑為 8 公分，則灰色部分圖形面積為何？

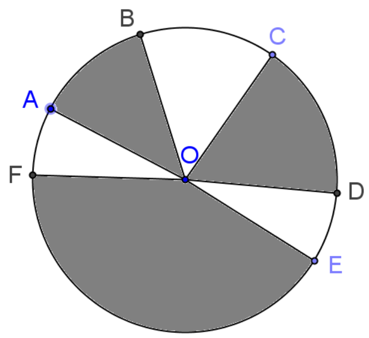


圖 9.2-110

習題 9.2-36

圖 9.2-111 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形外部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

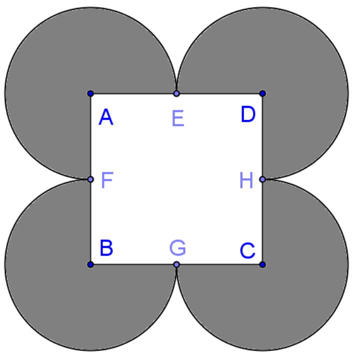


圖 9.2-111

習題 9.2-37

圖 9.2-112 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形內部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

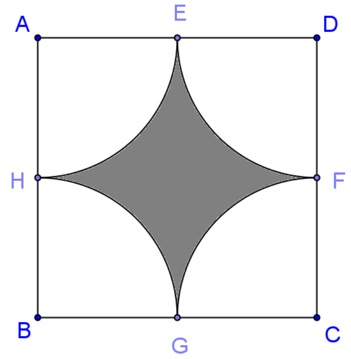


圖 9.2-112

習題 9.2-38

圖 9.2-113 中，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，若正方形邊長為 8 公分，且∠POQ＝120°，則灰色部分圖形面積為何？

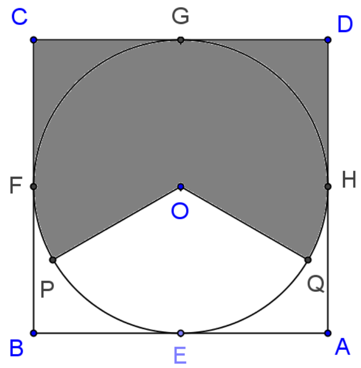


圖 9.2-113

習題 9.2-39

圖 9.2-114 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫 $\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$，則灰色部分圖形面積為何？

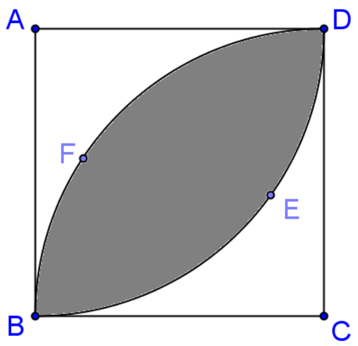


圖 9.2-114

習題 9.2-40

圖 9.2-115 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$為直徑畫半圓，且此四個半圓弧相交於 O 點，則灰色部分圖形面積為何？

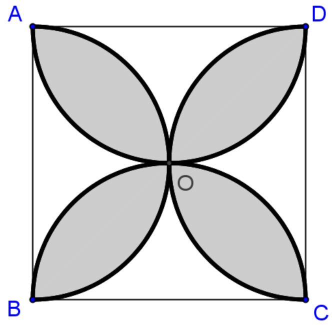


圖 9.2-115

習題 9.2-41

圖 9.2-116 中，△ABC 為邊長為 8 公分的正三角形，以 A 點為圓心，$\overline{AC}$為半徑作扇形 ABC，以 B 點為圓心，$\overline{BC}$為半徑作扇形 BAC，則圖中灰色部分面積為何？

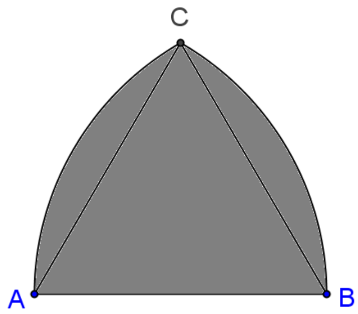


圖 9.2-116

習題 9.2-42

圖 9.2-117 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

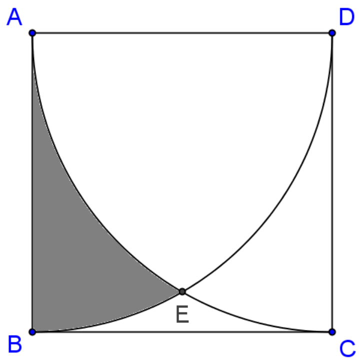


圖 9.2-117

習題 9.2-43

圖 9.2-118 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

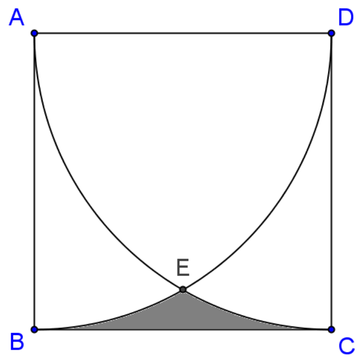


圖 9.2-118

習題 9.2-44

圖 9.2-119 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$=16 公分、短邊$\overline{AB}$=8 公分，求灰色部分的圖形面積為何？

圖 9.2-119

習題 9.2-45

圖 9.2-120 中，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的面積為何？

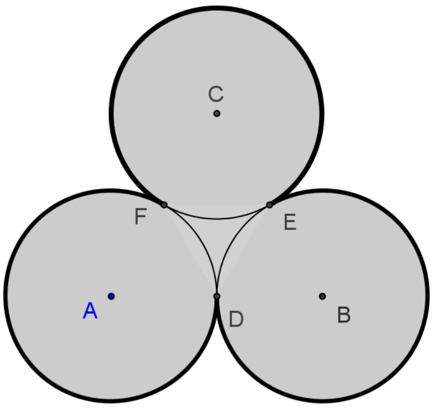


圖 9.2-120

習題 9.2-46

圖 9.2-121 是用三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體，再用一條緞帶環繞此形體一周，則灰色部分面積為何？

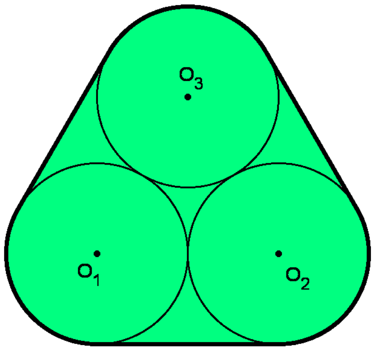


圖 9.2-121

習題 9.2-47

圖 9.2-122 中，△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙，若甲面積為 4.5π 平方公分，乙面積為 8π 平方公分，則丙面積為何？

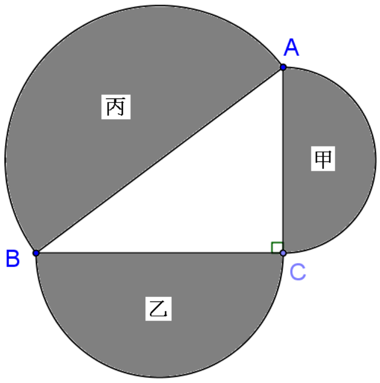


圖 9.2-122

習題 9.2-48

如圖 9.2-123，已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝16 公分，弦心距$\overline{OC}$＝6 公分，則圓 O 面積為何？

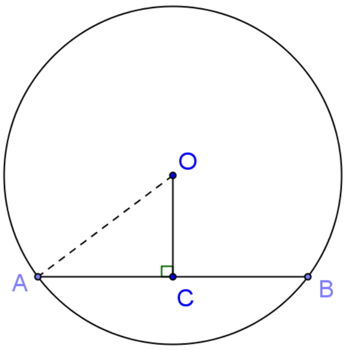


圖 9.2-123

習題 9.2-49

如圖 9.2-124，$\overline{AB}$ 為兩同心圓中大圓的弦，交小圓於 C、D。若 $\overline{AB}$＝40 公分，$\overline{CD}$＝28 公分，求兩圓所圍的灰色環狀區域面積。

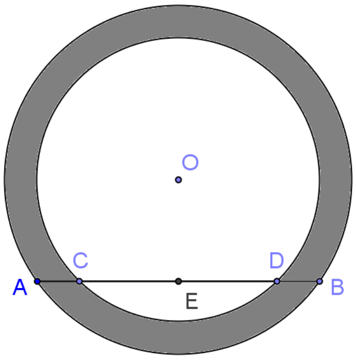


圖 9.2-124

習題 9.2-50

如圖 9.2-125，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$。若 $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分，求圓 I 的面積。

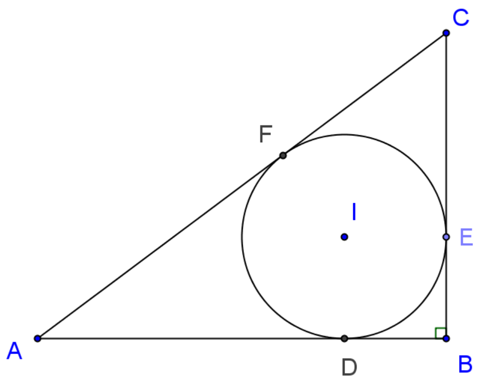


圖 9.2-125

習題 9.2-51

如圖 9.2-126，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{AC}$＝24 公分，試求△ABC 內切圓的面積。

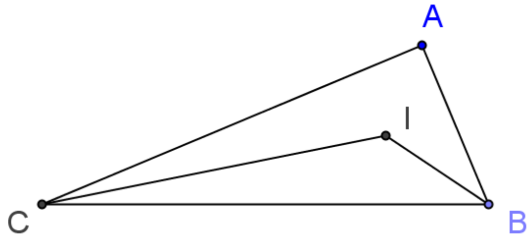


圖 9.2-126

習題 9.2-52

已知有甲、乙兩個圓，甲圓半徑為 4 公分、乙圓半徑為 6 公分，則：

(1) 甲圓周長與乙圓周長之比為何？

(2) 甲圓面積與乙圓面積之比為何？

習題 9.2-53

圖 9.2-127 中，$\overline{AB}$為圓 O_1 的直徑，$\overline{AO_1}$為圓 O_2 的直徑，已知$\overline{AB}$＝10 公分、$\overline{AO_1}$＝5 公分，則圓 O_1 面積是圓 O_2 的幾倍？

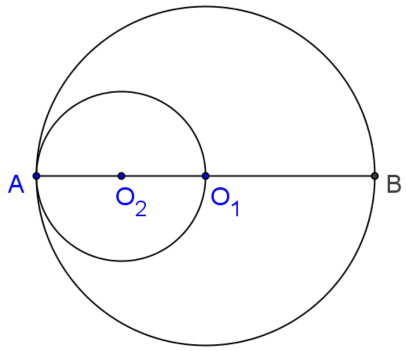


圖 9.2-127

習題 9.2-54

已知圓 O_1 半徑：圓 O_2 半徑＝3：5，若圓 O_1 面積為 18π 平方公分，則圓 O_2 面積為何？

9.3 節　立體的表面積與體積

定義 9.3-1　多面體

若干個多邊形圍成的封閉立體圖形，叫做多面體。
面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點。
四面體就是有四個面的立體圖形。五面體有五個面，六面體有六個面，其餘類推。圖 9.3-1 為四面體、五面體及六面體的透視圖。

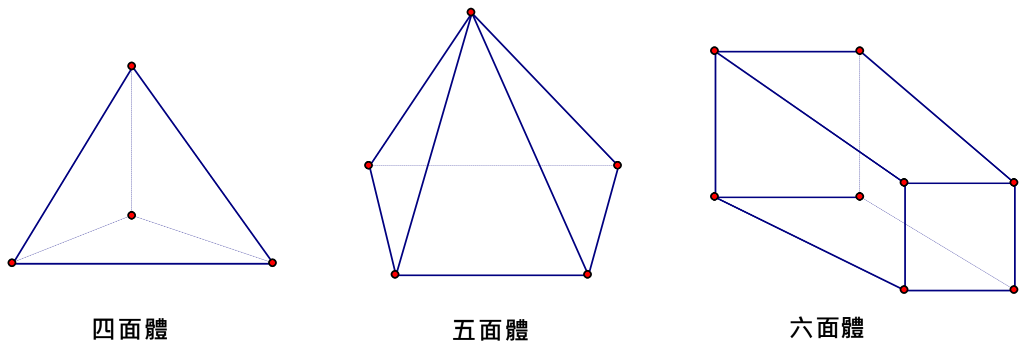


圖 9.3-1　多面體透視圖

例題 9.3-1

完成以下表格：

	四面體	五面體	六面體
面數			
頂點數			
稜線數			

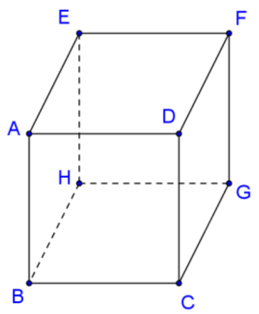
想法：利用多面體的定義

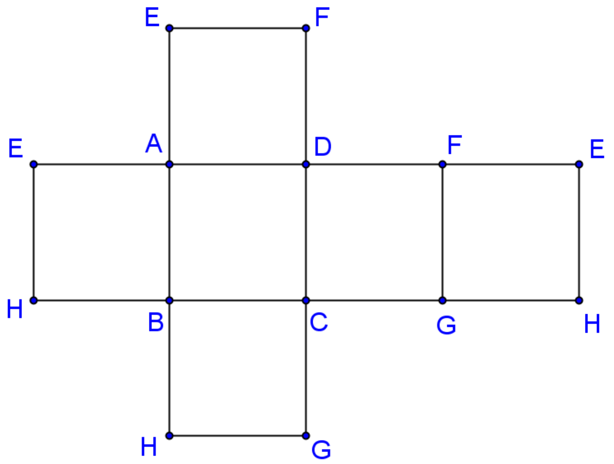
解：

敘述	理由
(1) 四面體有 4 個面、4 個頂點、6 條稜線	多面體定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 五面體有 5 個面、5 個頂點、8 條稜線	多面體定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(3) 六面體有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線	多面體定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點

定義 9.3-2 立方體

各面都是正方形的多面體，叫做立方體。





立方體透視圖 **立方體展開圖**

圖 9.3-2 立方體透視圖與展開圖

在圖 9.3-2 中，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FD}=\overline{BH}=\overline{HG}=\overline{GC}=\overline{EH}=\overline{FG}$ 皆為此立方體之邊長；且四邊形 EHBA、ABCD、DCGF、FGHE、EADF、BHGC 為六個全等之正方形。

定義 9.3-3 單位體積

長、寬、高都是單位長的立方體，叫做單位體積。

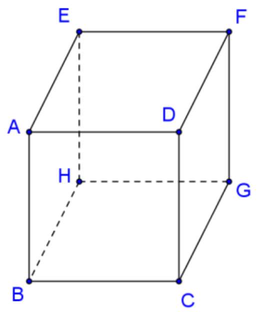
(若長、寬、高都是 1 單位的立方體，它的體積為 1 立方單位。)

定義 9.3-4 多面體的體積

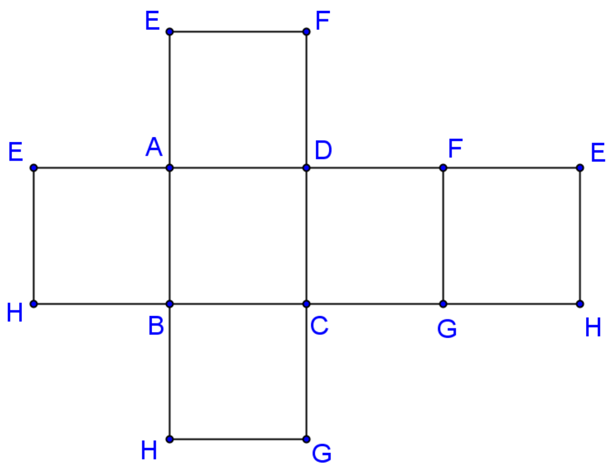
用單位體積去量立體圖形的體積大小，所得單位體積的倍數，叫做此立體圖形的體積。

定理 9.3-1 立方體表面積定理

立方體表面積等於邊長平方的 6 倍。



立方體透視圖



立方體展開圖

圖 9.3-3 立方體透視圖與展開圖

已知：立方體之邊長為 a
求證：立方體之表面積＝$6a^2$

想法：利用立方體之表面積定義及面積之計算。
證明：

敘述	理由
(1) 立方體之每一個面皆為正方形，其面積＝a^2	立方體之定義 & 正方形面積定理
(2) 立方體共有六個面(圖 9.3-3 為立方體展開)，其表面積為此六個面之和 ∴ 立方體表面積＝$6a^2$	立方體之定義

Q. E. D.

例題 9.3-2

已知圖 9.3-4 中立方體的邊長為 4 公分，則此立方體的表面積為何？

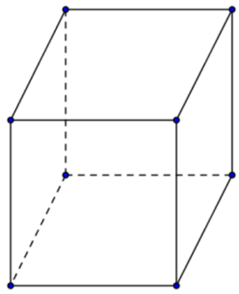


圖 9.3-4

想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 立方體表面積＝$6\times(4$ 公分$)^2$ ＝96 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 ＆ 已知立方體的邊長為 4 公分

例題 9.3-3

已知圖 9.3-5 中立方體的表面積為 150 平方公分，則此立方體的邊長為何？

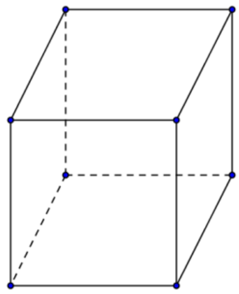


圖 9.3-5

想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) $6\times$(立方體邊長$)^2$＝150 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 ＆ 已知一立方體的表面積為 150 平方公分
(2) (立方體邊長$)^2$＝(150 平方公分$)\div 6$ ＝25 平方公分	由(1) 等量除法公理
(3) 立方體邊長＝5 公分 或 立方體邊長＝－5 公分	由(2) 求平方根
(4) 所以立方體邊長＝5 公分	由(3) ＆ 立方體邊長必大於 0

例題 9.3-4

已知一立方體的邊長變為原來的 3 倍，則此立方體的表面積變為原來的幾倍？

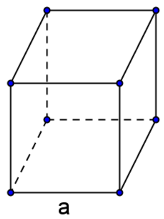


圖 9.3-6(a)

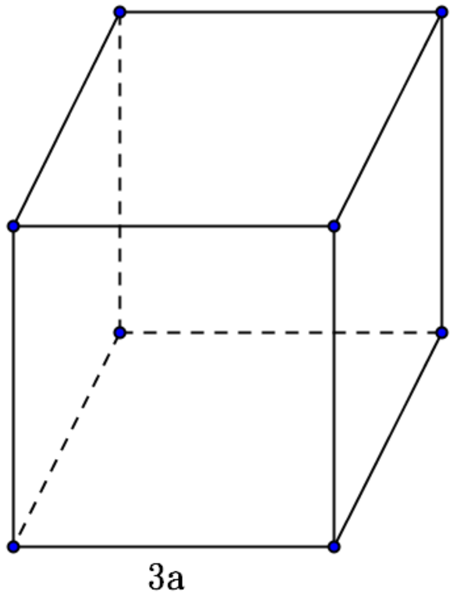


圖 9.3-6(b)

想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 假設原立方體的邊長為 a， 如圖 9.3-6(a)所示， 則此立方體表面積＝$6a^2$	假設 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(2) 立方體邊長變為 3a， 如圖 9.3-6(b)所示， 則此立方體表面積＝$6\times(3a)^2$＝$54a^2$	由(1) 假設 & 已知一立方體的邊長變為原來的 3 倍 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(3) 圖 9.3-6(b)立方體表面積 ＝54 a^2 ＝$9\times(6a^2)$ ＝9×圖 9.3-6(a)立方體表面積	由(1) 圖 9.3-6(a)立方體表面積＝$6a^2$ & (2) 圖 9.3-6(b)立方體表面積＝54 a^2
(4) 所以表面積變為原來的 9 倍	由(3) 已證

定理 9.3-2 立方體體積定理

立方體體積等於邊長的立方。

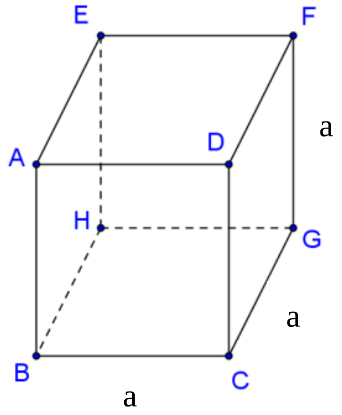


圖 9.3-7 立方體透視圖

已知：如圖 9.3-7，立方體之邊長為 a。

求證：立方體之體積＝a^3

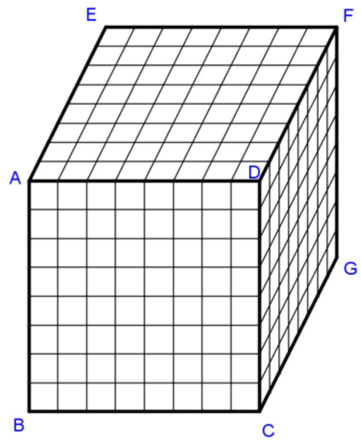


圖 9.3-8

想法：將邊長為 a 之立方體切割成邊長為單位長的立方體

證明：

敘述	理由
(1) 將立方體的的每邊都切割成 a 等份，則每一等份皆為單位長，如圖 9.3-8；因此共可切割成 a^3 個單位體積	已知立方體之邊長為 a
(2) 立方體之體積為此 a^3 個單位體積之和 ∴ 立方體之體積＝a^3	由(1) & 邊長為單位長的立方體體積為單位體積

Q. E. D.

例題 9.3-5

已知圖 9.3-9 中立方體的邊長為 4 公分，則此立方體的體積為何？

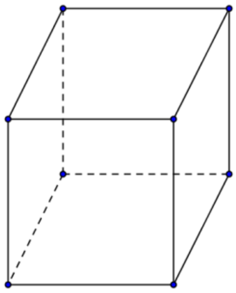


圖 9.3-9

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) 立方體體積＝(4 公分)^3 ＝64 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 已知立方體的邊長為 4 公分

例題 9.3-6

已知圖 9.3-10 中立方體的體積為 8 立方公分，則此立方體的邊長為何？

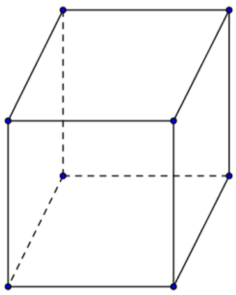


圖 9.3-10

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) (立方體邊長)^3＝8 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 已知立方體的體積為 8 立方公分
(2) 立方體邊長＝2 公分	由(1) 求立方根

例題 9.3-7

若一立方體的邊長變為原來的 2 倍，則此立方體的體積變為原來的幾倍？

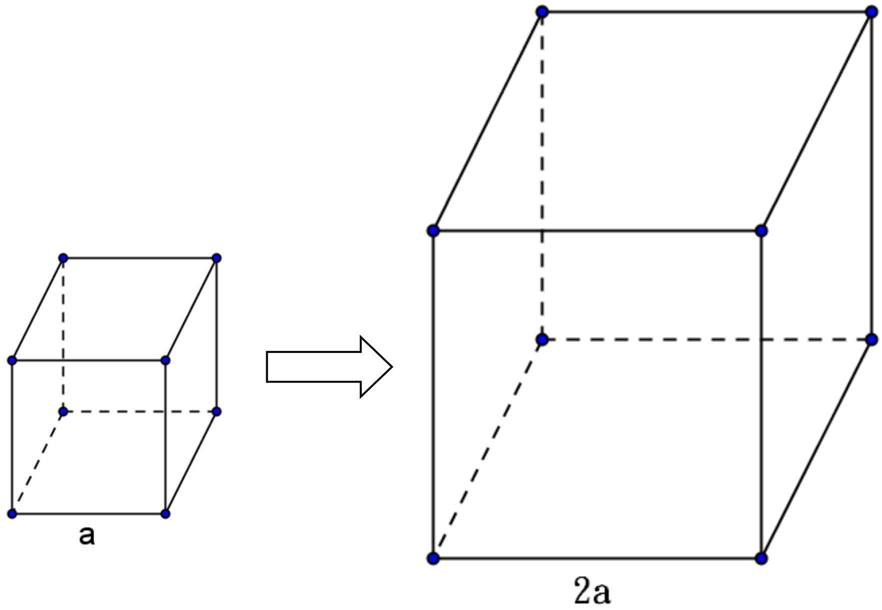


圖 9.3-11(a) **圖 9.3-11(b)**

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) 假設原立方體的邊長為 a， 如圖 9.3-11(a)所示， 則此立方體的體積＝a^3	假設 & 立方體體積等於邊長的立方
(2) 立方體邊長變為 2a， 如圖 9.3-11(b)所示， 則此立方體的體積＝$(2a)^3$＝$8a^3$	由(1) 假設 & 已知一立方體的邊長變為原來的 2 倍 & 立方體體積等於邊長的立方
(3) 圖 9.3-11(b)立方體的體積 ＝$8a^3$ ＝$8\times(a^3)$ ＝8×圖 9.3-11(a)立方體的體積	由(1) 圖 9.3-11(a) 立方體的體積＝a^3 & (2) 圖 9.3-11(b) 立方體的體積＝$8a^3$
(4) 所以體積變為原來的 8 倍	由(3) 已證

例題 9.3-8

已知圖 9.3-12 中立方體的表面積為 384 平方公分,則此立方體的體積為何?

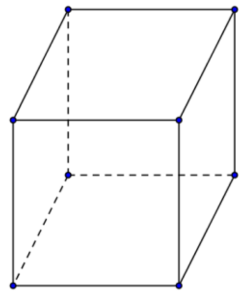


圖 9.3-12

想法:(1) 由立方體表面積等於邊長平方的 6 倍,求出此立方體的邊長

(2) 立方體體積等於邊長的立方

解:

敘述	理由
(1) $6\times$(立方體邊長)^2＝384 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 ＆ 已知立方體的表面積為 384 平方公分
(2) (立方體邊長)^2＝(384 平方公分)÷6 ＝64 平方公分	由(1) 等量除法公理
(3) 立方體邊長＝8 公分 或 立方體邊長＝－8 公分	由(2) 求平方根
(4) 所以立方體邊長＝8 公分	由(3) ＆ 立方體邊長必大於 0
(5) 立方體體積＝(8 公分)^3 ＝512 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 ＆ 由(4) 立方體邊長＝8 公分 已證

例題 9.3-9

已知圖 9.3-13 中立方體的體積為 125 立方公分，則此立方體的表面積為何？

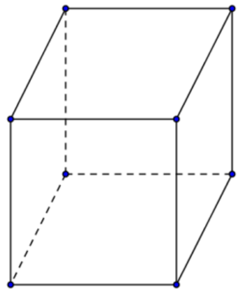


圖 9.3-13

想法：(1) 由立方體體積等於邊長的立方，求出此立方體的邊長

(2) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) (立方體邊長)^3＝125 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 ＆ 已知立方體的體積為 125 立方公分
(2) 立方體邊長＝5 公分	由(1) 求立方根
(3) 立方體表面積＝6×(5 公分)^2 ＝150 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 ＆ 由(2) 立方體邊長＝5 公分

例題 9.3-10

若甲立方體的體積是乙立方體體積的 27 倍，則甲立方體的表面積是乙立方體表面積的幾倍？

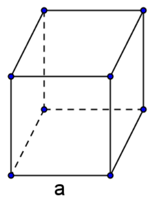


圖 9.3-14(a) 乙立方體

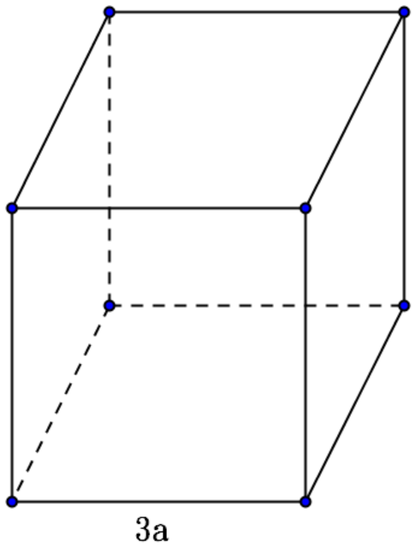


圖 9.3-14(b) 甲立方體

想法：(1) 由立方體體積等於邊長的立方，找出甲、乙兩立方體邊長的關係

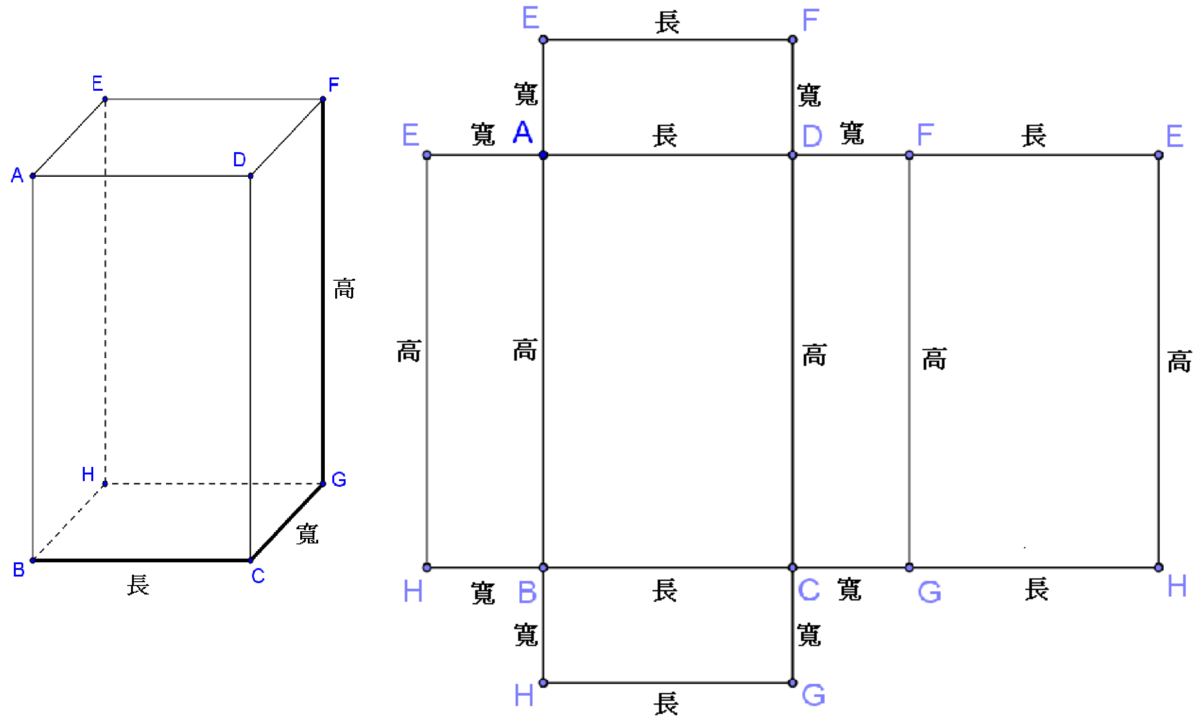
(2) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 假設乙立方體的邊長為 a，如圖 9.3-14(a) 所示，則： 乙立方體的體積＝a^3， 乙立方體表面積＝$6a^2$	假設 & 立方體體積等於邊長的立方 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(2) 甲立方體的體積＝$27\ a^3$ 如圖 9.3-14(b) 所示	已知甲立方體的體積是乙立方體體積的 27 倍 & (1) 乙立方體的體積＝a^3
(3) $(甲立方體邊長)^3＝27\ a^3$	由(2) & 立方體體積等於邊長的立方
(4) 甲立方體邊長＝3a	由(3) 求立方根
(5) 甲立方體表面積 ＝$6\times(3a)^2$ ＝$54a^2$ ＝$9\times(6a^2)$ ＝$9\times$(乙立方體表面積)	由(3) 甲立方體邊長＝3a & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 由(1) 乙立方體表面積＝$6a^2$
(6) 所以甲立方體表面積是乙立方體表面積的 9 倍	由(5) 已證

定義 9.3-5 長立方體(長方體)

多面體的各面都是長方形，叫做長立方體或叫做長方體。



長方體透視圖 **長方體展開圖**

圖 9.3-15 長方體透視圖與長方體展開圖

在圖 9.3-15 中，$\overline{BC}=\overline{DA}=\overline{EF}=\overline{HG}$皆為此長方體之長、$\overline{AE}=\overline{FD}=\overline{BH}=\overline{GC}$皆為此長方體之寬、$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EH}=\overline{FG}$皆為此長方體之高；

且長方形 ABCD 面積＝長方形 FGHE 面積、長方形 EHBA 面積＝長方形 DCGF 面積、長方形 EADF 面積＝長方形 BHGC 面積。

例題 9.3-11

完成以下表格：

	立方體	長方體
面數		
面的形狀		
頂點數		
稜線數		

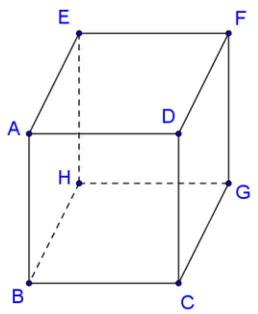


圖 9.3-16(a) 立方體

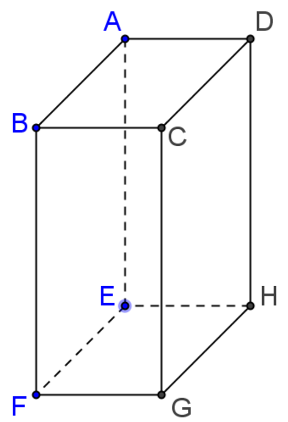


圖 9.3-16(b) 長方體

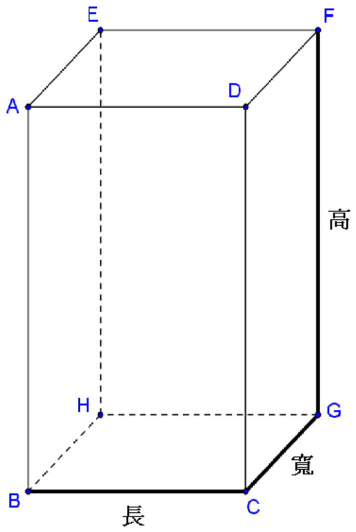
想法：利用立方體及長方體的定義

解：

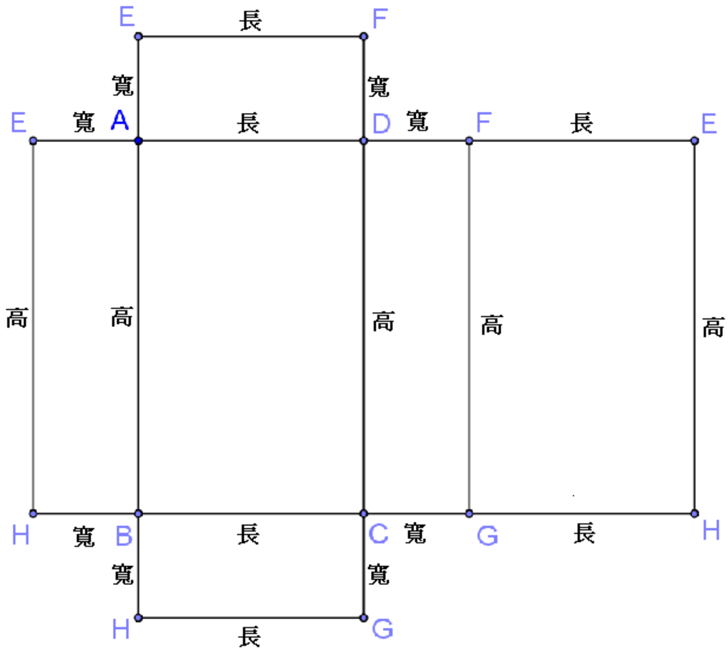
敘述	理由
(1) 如圖 9.3-16(a)所示，立方體有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線，且 6 個面皆為正方形	立方體定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-16(b)所示，長方體有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線，且 6 個面皆為長方形	長方體定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點

定理 9.3-3 長立方體的表面積定理

長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍。



長方體透視圖



長方體展開圖

圖 9.3-17 長方體透視圖與長方體展開圖

已知：如圖 9.3-17 所示，已知長方體的長為 a、寬為 b、高為 c

求證： 長方體之表面積＝2(axb＋bxc＋cxa)

想法：長方體六個面皆為長方形，且長方形面積為長與寬之乘積

證明：

敘述	理由
(1) 長方形 ABCD 面積 ＝長方形 FGHE 面積＝axc 長方形 EHBA 面積 ＝長方形 DCGF 面積＝bxc 長方形 EADF 面積 ＝長方形 BHGC 面積＝axb	長方體定義 & 長方形面積為長與寬之乘積 & 已知長方體的長為 a、寬為 b、高為 c
(2) 長方體之表面積為六個面面積之和 ∴ 長方體之表面積＝2(axb＋bxc＋cxa)	由(1) & 加法

Q. E. D.

例題 9.3-12

如圖 9.3-18，已知一長方體的長為 8 公分、寬為 6 公分、高為 4 公分，則此長方體的表面積為何？

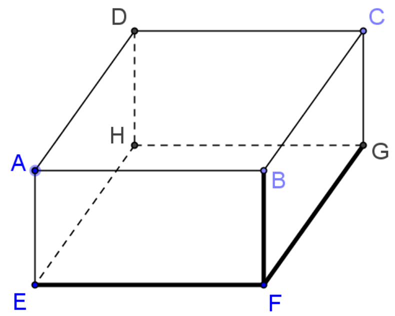


圖 9.3-18

想法：長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

解：

敘述	理由
(1) 長方體表面積 ＝2×[(8 公分)×(6 公分)＋(6 公分)×(4 公分) ＋(4 公分)×(8 公分)] ＝2×[48＋24＋32] 平方公分 ＝208 平方公分	長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知一長方體的長為 8 公分、寬為 6 公分、高為 4 公分

例題 9.3-13

已知一長方體的長為 3 公分、寬為 4 公分，且其表面積為 94 平方公分，則此長方體的高為何？

想法：長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

解：

敘述	理由
(1) 假設此長方體的高為 h 公分	假設
(2) 94＝2×(3×4＋4×h＋h×3)	長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知一長方體的長為 3 公分、寬為 4 公分，且其表面積為 94 平方公分 & 由(1) 假設此長方體的高為 h 公分
(3) h＝5	由(2) 解一元一次方程式
(4) 所以此長方體的高為 5 公分	由(1) & (3) 已證

定理 9.3-4 長立方體的體積定理

長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積。

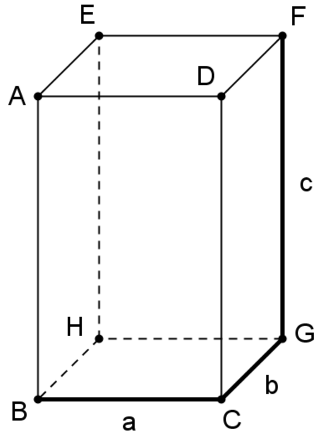


圖 9.3-19 長方體透視圖

已知：如圖 9.3-19 所示，已知長方體的長為 a、寬為 b、高為 c

求證：長方體之體積＝axbxc

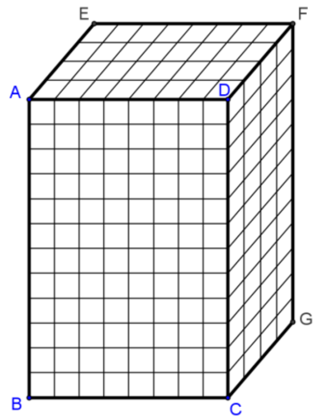


圖 9.3-20

想法：將長方體切割成邊長為單位長的立方體

證明：

敘述	理由
(1) 將長方體的長分為 a 等份、將寬分為 b 等份、將高分為 c 等份，則每一等份皆為單位長，如圖 9.3-20 所示；因此可將此長方體切割成 axbxc 個單位體積	已知長方體的長為 a、寬為 b、高為 c
(2) 長方體的體積為此 axbxc 個單位體積之和 ∴長方體之體積＝axbxc	由(1) & 邊長為單位長的立方體體積為單位體積

Q. E. D.

例題 9.3-14

如圖 9.3-21，已知一長方體的長為 4 公分、寬為 3 公分、高為 2 公分，則此長方體的體積為何？

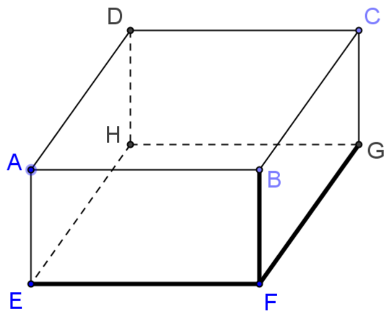


圖 9.3-21

想法：長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積

解：

敘述	理由
(1) 長方體體積 ＝(4 公分)×(3 公分)×(2 公分) ＝24 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知一長方體的長為 4 公分、寬為 3 公分、高為 2 公分

例題 9.3-15

有一長方體，其底面為邊長 4 公分的正方形，高為 12 公分，若將底面正方形邊長增加 4 公分，則高要變為幾公分，體積才不會改變？

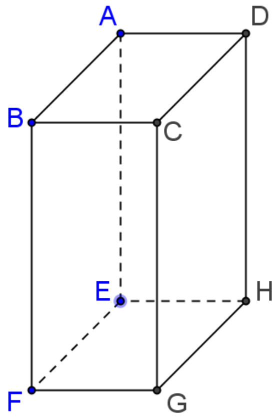


圖 9.3-22(a)

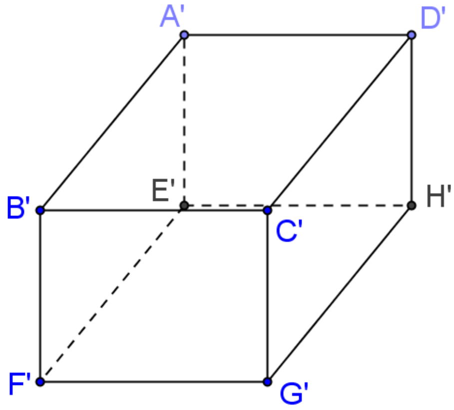


圖 9.3-22(b)

想法：長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫圖，如圖 9.3-22(a)，其中 長方體的長$\overline{FG}$＝4 公分， 長方體的寬$\overline{GH}$＝4 公分， 長方體的高$\overline{GC}$＝12 公分 則長方體體積 ＝(4 公分)×(4 公分)×(12 公分) ＝192 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知有一長方體，其底面為邊長 4 公分的正方形，高為 12 公分
(2) 依題意假設，如圖 9.3-22(b)，其中 長方體的長$\overline{F'G'}$＝8 公分， 長方體的寬$\overline{G'H'}$＝8 公分， 假設長方體的高$\overline{G'C'}$＝h 公分 則長方體體積 ＝(8 公分)×(8 公分)×(h 公分) ＝(64×h) 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知將底面正方形邊長增加 4 公分 & 假設
(3) 192 立方公分＝(64×h) 立方公分	題意說明體積不變 & 由(1)、(2) 已證
(4) h＝192÷64＝3	由(3) 等量除法公理
(5) 所以長方體的高變為 3 公分	由(2) 假設長方體的高$\overline{G'C'}$＝h 公分 & (4) h＝3 已證

例題 9.3-16

已知一長方體和一立方體的體積相同，若此長方體的長為 16 公分、寬為 8 公分、高為 4 公分，求立方體的表面積。

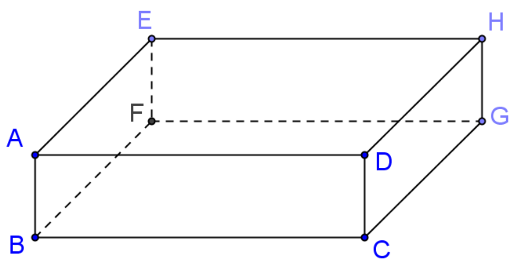


圖 9.3-23(a)

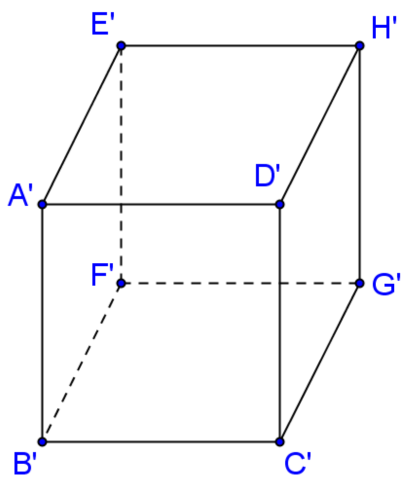


圖 9.3-23(b)

想法：(1) 由長寬高三邊的乘積求出長方體的體積

(2) 由立方體體積等於邊長的立方，求出立方體的邊長

(3) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫圖，如圖 9.3-23(a)，其中長方體的長$\overline{BC}$＝16 公分，長方體的寬$\overline{CG}$＝8 公分，長方體的高$\overline{CD}$＝4 公分 則長方體體積 ＝(16 公分)×(8 公分)×(4 公分) ＝512 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知此長方體的長為 16 公分、寬為 8 公分、高為 4 公分
(2) 假設此立方體的邊長為 a 公分，如圖 9.3-23(b)所示， 則立方體體積＝a^3 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 假設
(3) 512 立方公分＝a^3 立方公分	已知長方體和立方體的體積相同 & 由(1)、(2) 已證
(4) a＝8 (即立方體邊長為 8 公分)	由(3) 求立方根 & (2) 假設
(5) 立方體的表面積 ＝6×(8 公分)^2＝384 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 由(4) 立方體邊長為 8 公分 已證

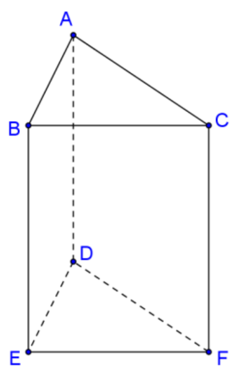
定義 9.3-6 多角柱體

有兩面平行且全等，而其他各面都是四邊形(長方形或平行四邊形)的多面體，叫做多角柱體。

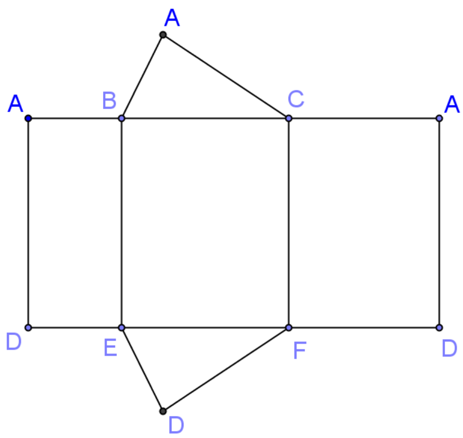
平行的兩面為底面，一為上底面，另一為下底面，其他面為側面。

若每一個側面與底面皆成直角，叫**直角柱**(直角柱的側面皆為長方形)，否則叫做**斜角柱**(斜角柱的側面為長方形或平行四邊形)；本書僅作直角柱之探討，直角柱之側面皆為矩形。

若上下底面為三角形為三角柱體，上下底面為四邊形為四角柱體，上下底面為五邊形為五角柱體，餘此類推，上下底面為 n 多邊形就叫做 n 角柱。



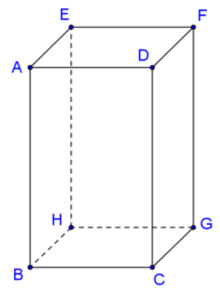
三角柱透視圖

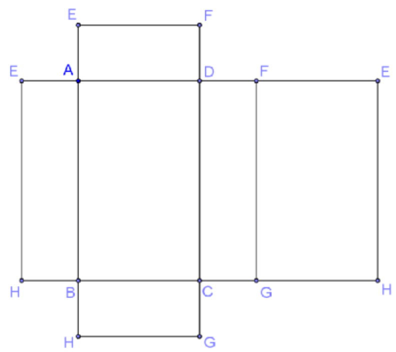


三角柱展開圖

圖 9.3-24 三角柱體的透視圖與展開圖

上圖 9.3-24 中，△ABC 為上底面、△DEF 為下底面，且上底面△ABC 與下底面△DEF 互相平行、△ABC ≅ △DEF；矩形 ADEB、矩形 BEFC 與矩形 CFDA 皆為此三角柱的側面，且均同時與△ABC、△DEF 垂直。



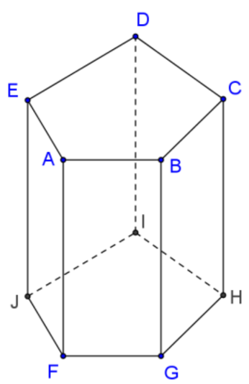


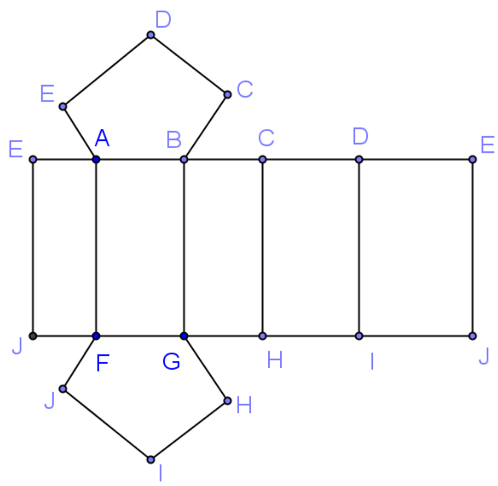
四角柱透視圖　　　　　　　　**四角柱展開圖**

圖 9.3-25 四角柱體的透視圖與展開圖

上圖 9.3-25 中，四邊形 ADFE 為上底面、四邊形 BCGH 為下底面，且上底面四邊形 ADFE 與下底面四邊形 BCGH 互相平行、四邊形 ADFE ≅ 四邊形 BCGH；

矩形 EHBA、矩形 ABCD、矩形 DCGF 與矩形 FGHE 皆為此四角柱的側面，且均同時與四邊形 ADFE、四邊形 BCGH 垂直。





五角柱透視圖　　　　　　　　**五角柱展開圖**

圖 9.3-26 角柱體的透視圖與展開圖

上圖 9.3-26 中，五邊形 ABCDE 為上底面、五邊形 FGHIJ 為下底面，且上底面五邊形 ABCDE 與下底面五邊形 FGHIJ 互相平行、五邊形 ABCDE ≅ 五邊形 FGHIJ；矩形 EJFA、矩形 AFGB、矩形 BGHC、矩形 CHID 與矩形 DIJE 皆為此五角柱的側面，且均同時與五邊形 ABCDE、五邊形 FGHIJ 垂直。

例題 9.3-17

完成以下表格：(以下柱體皆為直角柱)

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角柱					
四角柱					
五角柱					
n 角柱					

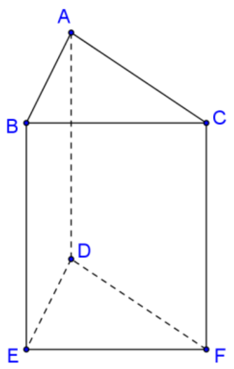


圖 9.3-27(a)

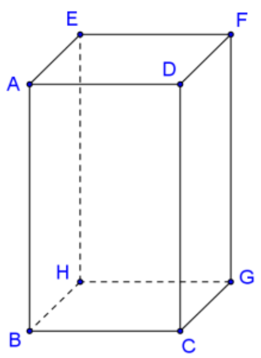


圖 9.3-27(b)

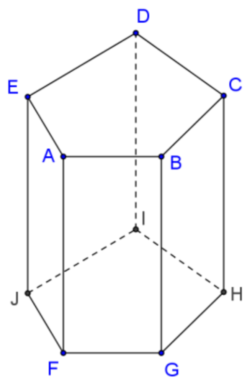


圖 9.3-27(c)

想法：利用直角柱體的定義

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-27(a)所示，三角柱有 5 個面、6 個頂點、9 條稜線，且 2 個底面皆為三角形、3 個側面皆為矩形	三角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-27(b)所示，四角柱有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線，且 2 個底面與 4 個側面皆為矩形	四角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點

(3) 如圖 9.3-27(c)所示， 五角柱有 7 個面、10 個頂點、15 條稜線，且 2 個底面皆為五邊形、5 個側面皆為矩形	五角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(4) n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線，且 2 個底面皆為 n 邊形、n 個側面皆為矩形	n 角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點 & 由(1)～(3) 歸納得知

由例題 9.3-17，我們得到一個結論：**n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線，且 2 個底面皆為 n 邊形、n 個側面皆為矩形**。接下來，我們就利用此結論，來作以下的例題 9.3-15。

例題 9.3-18

若某個直角柱有 18 條稜邊、a 個頂點與 b 個面，求 $a\times b$ 之值為何？

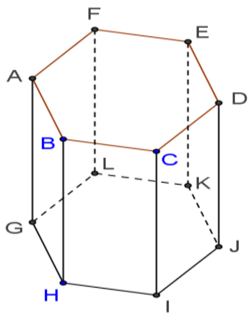


圖 9.3-28

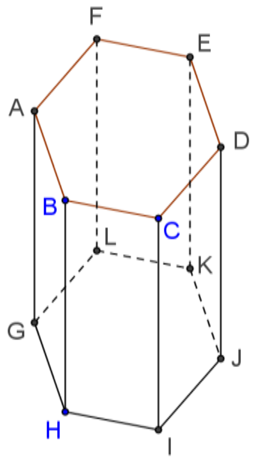
想法：n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線

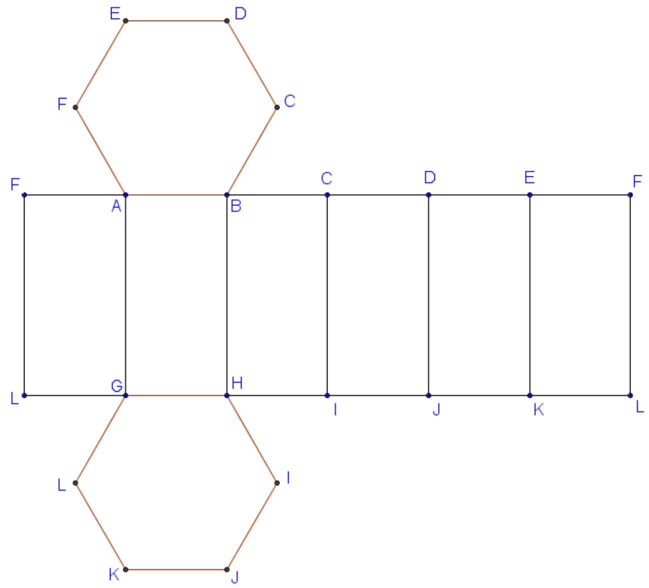
解：

敘述	理由
(1) 假設此直角柱為 n 直角柱，則此 n 直角柱有(3n)條稜線	假設 & n 角柱有(3n)條稜線
(2) 3n＝18	由(1) & 已知某個直角柱有 18 條稜邊
(3) n＝18÷3＝6	由(2) 求 n 之值
(4) 所以此直角柱為六角柱， 六角柱有 2x6＝12 個頂點、 有 6＋2＝8 個面	由(1) 假設 & (3) n＝6 已證 & n 角柱(2n)個頂點、有(n＋2)個面
(5) a＝12 且 b＝8	由(4) & 已知某個直角柱有 a 個頂點與 b 個面
(6) $a\times b$＝12x8＝96	由(5)

定理 9.3-5 多角柱體的表面積定理

角柱的表面積等於上下底面積和再加上所有側面積的和。





角柱的透視圖 **角柱的展開圖**

圖 9.3-29 角柱的透視圖與展開圖

已知： 如圖 9.3-29 所示，若角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h

求證： 角柱的表面積＝2A＋S×h

想法： 將角柱展開，所有面的面積和即為角柱的表面積

證明：

敘述	理由
(1) 上底面 ABCDEF 面積＝下底面 GHIJKL 面積＝A	已知角柱的底面積為 A
(2) $\overline{FL}=\overline{AG}=\overline{BH}=\overline{CI}=\overline{DJ}=\overline{EK}=$h	已知柱高為 h
(3) FLGA 面積＝$\overline{FA}\times\overline{FL}=\overline{FA}\times$h	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{FL}=$h
(4) AGHB 面積＝$\overline{AB}\times\overline{AG}=\overline{AB}\times$h	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{AG}=$h
(5) BHIC 面積＝$\overline{BC}\times\overline{BH}=\overline{BC}\times$h	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{BH}=$h
(6) CIJD 面積＝$\overline{CD}\times\overline{CI}=\overline{CD}\times$h	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{CI}=$h
(7) DJKE 面積＝$\overline{DE}\times\overline{DJ}=\overline{DE}\times$h	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{DJ}=$h

(8) EKLF 面積＝$\overline{EF}\times\overline{EK}=\overline{EF}\times h$	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{EK}=h$
(9) 柱體側面積的和 ＝FLGA 面積＋AGHB 面積＋ BHIC 面積＋CIJD 面積＋ DJKE 面積＋EKLF 面積 $=\overline{FA}\times h+\overline{AB}\times h+\overline{BC}\times h+\overline{CD}\times h+$ $\overline{DE}\times h+\overline{EF}\times h$ $=(\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF})\times h$ ＝S×h	由(3)式＋(4)式＋(5)式＋(6)式＋(7)式＋(8)式得 提出公因數 h
(10) 角柱的表面積 ＝上下底面積和＋所有側面積的和 ＝2A＋S×h	表面積定義 & 將(1) & (9) 代入

Q. E. D.

例題 9.3-19

圖 9.3-30 為一六角柱體，已知其底面面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，底面周長為 24 公分，若柱體的高為 2 公分，則此六角柱體的表面積為何？

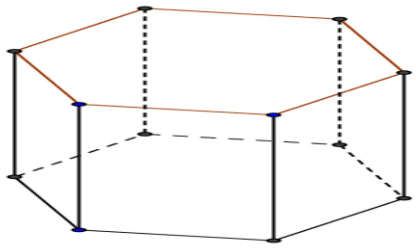


圖 9.3-30

想法：角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 此六角柱表面積 $=2\times(24\sqrt{3}$ 平方公分) ＋(24 公分)×(2 公分) $=(48+48\sqrt{3})$ 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱表面積＝2A＋S×h & 已知六角柱的底面面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，底面周長為 24 公分，柱體的高為 2 公分

例題 9.3-20

圖 9.3-31 是底面為梯形的四角柱，已知梯形的上底$\overline{AB}$＝6 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝9 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝4 公分且梯形另一邊$\overline{AD}$＝5 公分，若四角柱的高$\overline{FB}$＝10 公分，則此四角柱的表面積為何？

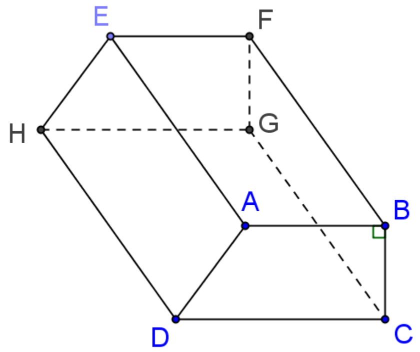


圖 9.3-31

想法： 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 上底面梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(6\text{公分}+9\text{公分})\times(4\text{公分})}{2}$ ＝30 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形的上底$\overline{AB}$＝6 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝9 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝4 公分
(2) 上底面梯形 ABCD 周長 ＝$\overline{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{DC}$＋$\overline{AD}$ ＝(6＋4＋9＋5) 公分 ＝24 公分	周長定義 & 已知梯形的上底$\overline{AB}$＝6 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝9 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝4 公分且梯形另一邊$\overline{AD}$＝5 公分
(3) 此四角柱的表面積 ＝2×(30 平方公分)＋ (24 公分)×(10 公分) ＝300 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱的表面積＝2A＋S×h & (1) 底面梯形 ABCD 面積＝30 平方公分、 (2) 底面梯形 ABCD 周長＝24 公分 & 已知四角柱的高$\overline{FB}$＝10 公分

例題 9.3-21

有一三角柱體，其底面為直角三角形，兩股長分別為 6 公分及 8 公分，若三角柱體的高為 7 公分，則此三角柱體的表面積為何？

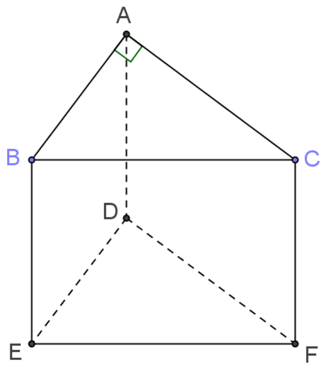


圖 9.3-32(a)

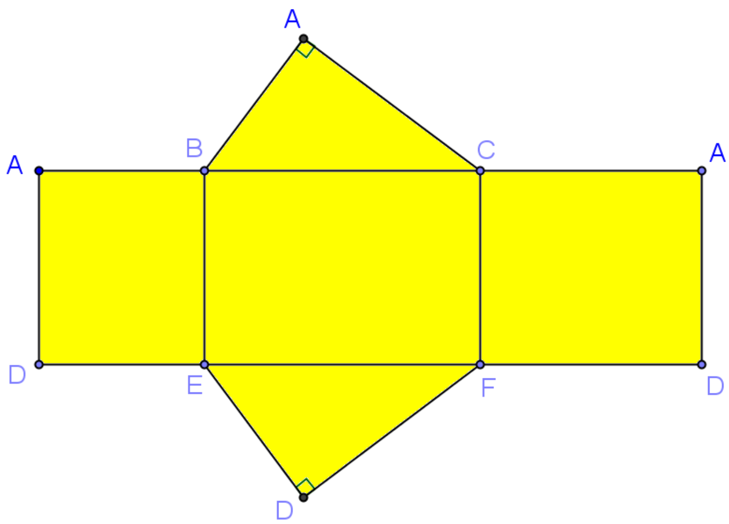


圖 9.3-32(b)

想法：(1) 利用畢氏定理求出直角三角形斜邊，並求出底面周長

(2) 若角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 依題意繪圖， 如圖 9.3-32(a) 三角柱透視圖、 圖 9.3-32(b) 三角柱展開圖	作圖
(2) 上底面△ABC 為直角三角形， 其中∠A＝90°、$\overline{AB}$＝6 公分、 $\overline{AC}$＝8 公分	如圖 9.3-32(b)所示 已知有一三角柱體，其底面為直角三角形，兩股長分別為 6 公分及 8 公分
(3) △ABC 中， $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$	畢氏定理
(4) $\overline{BC}^2$＝(6 公分)^2＋(8 公分)^2 ＝100 平方公分	將(2) $\overline{AB}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分 代入(3) 式得
(5) $\overline{BC}$＝10 公分 或 $\overline{BC}$＝－10 公分	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{BC}$＝10 公分	由(5) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0

(7) △ABC 周長 $=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}$ ＝6 公分＋8 公分＋10 公分 ＝24 公分	周長定義 & (2) $\overline{AB}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分 & (6) $\overline{BC}$＝10 公分
(8) △ABC 面積 $=(\overline{AB}\times\overline{AC})\div 2$ ＝(6 公分)×(8 公分)÷2 ＝24 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 & (2) $\overline{AB}$＝6 公分、$\overline{AC}$＝8 公分
(9) 三角柱表面積 ＝2×(△ABC 面積)＋ (△ABC 周長)×(三角柱體的高) ＝2×(24 平方公分)＋ (24 公分)×(7 公分) ＝216 平方公分	若角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱的表面積＝2A＋S×h & (8) △ABC 面積＝24 平方公分、 (7) △ABC 周長＝24 公分 & 已知三角柱體的高為 7 公分

定理 9.3-6 多角柱體的體積定理

角柱的體積等於底面積乘以角柱的高。

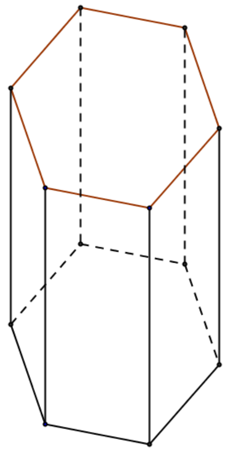


圖 9.3-33 角柱的透視圖

已知：如圖 9.3-33 所示，若角柱的底面積為 A、柱高為 h

求證： 角柱體積＝A×h

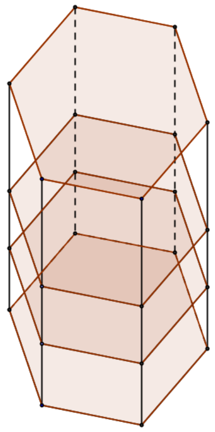


圖 9.3-34

想法：將角柱切成平面，則所有平面面積之和即為角柱體積

證明：

敘述	理由
(1) 將角柱切成平面，如圖 9.3-34 所示，則每個平面面積皆與底面積相等，且所有平面堆疊起來的高度為柱體的高	全量等於分量之和 **(註：此部份需用到微積分觀念，超出本書討論範圍)**
(2) 所有平面面積之和即為角柱體積 ∴角柱體積＝A×h	由(1) & 已知角柱的底面積為 A、柱高為 h

Q. E. D.

例題 9.3-22

圖 9.3-35 為一六角柱體，已知其底面面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，柱體的高為 2 公分，則此六角柱體的體積為何？

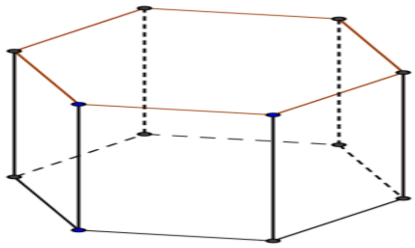


圖 9.3-35

想法：角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

解：

敘述	理由
(1) 此六角柱體的體積 $=(24\sqrt{3}$ 平方公分$)\times(2$ 公分$)$ $=48\sqrt{3}$ 平方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 & 已知六角柱體的底面面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，柱體的高為 2 公分

例題 9.3-23

圖 9.3-36 是底面為梯形的四角柱，已知梯形的上底$\overline{AB}$＝6 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝9 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝4 公分，若四角柱的高$\overline{FB}$＝10 公分，則此四角柱的體積為何？

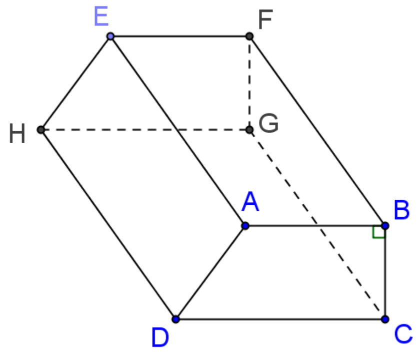


圖 9.3-36

想法：角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

解：

敘述	理由
(1) 上底面梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(6\text{公分}+9\text{公分})\times(4\text{公分})}{2}$ ＝30 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形的上底$\overline{AB}$＝6 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝9 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝4 公分
(2) 此四角柱的體積 ＝(30 平方公分)×(10 公分) ＝300 立方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 & (1) 底面梯形 ABCD 面積＝30 平方公分 & 已知四角柱的高$\overline{FB}$＝10 公分

例題 9.3-24

圖 9.3-37 為底面為直角三角形的三角柱體，已知△ABC 中，∠A＝90°、其中一股$\overline{AB}$＝6 公分、斜邊$\overline{BC}$＝10 公分，若三角柱體的高$\overline{BE}$＝7 公分，則此三角柱體的體積為何？

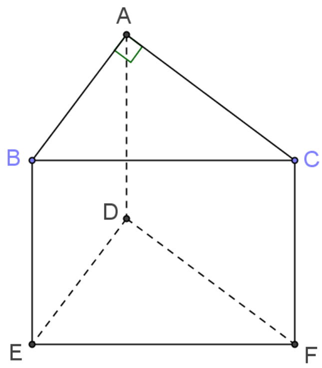


圖 9.3-37

想法：(1) 利用畢氏定理求出直角三角形的另一股

(2) 三角形面積為底與高乘積的一半

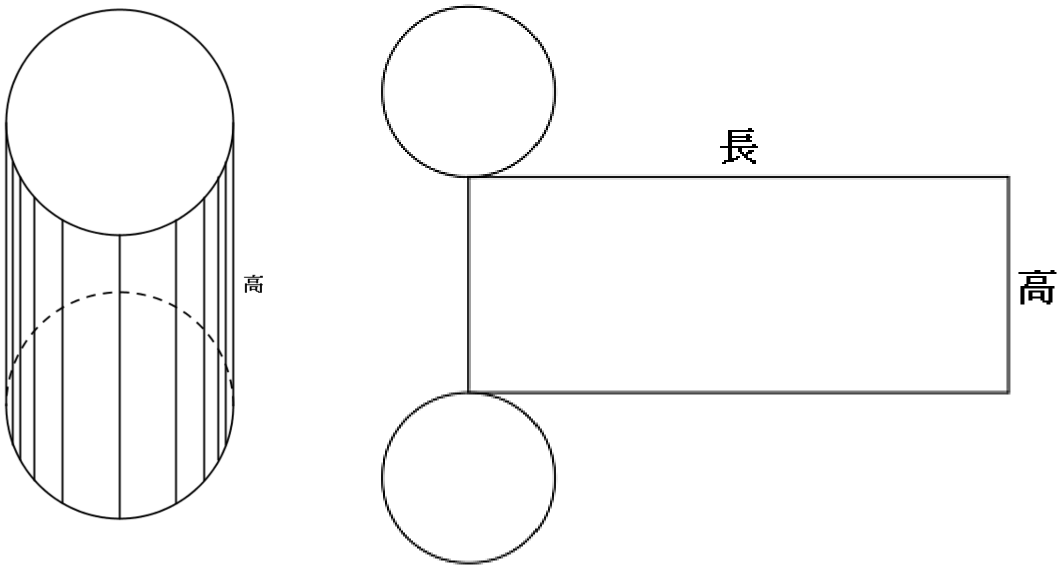
(3) 角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$	已知△ABC 中，∠A＝90° & 畢氏定理
(2) (6 公分)^2＋$\overline{AC}^2$＝(10 公分)^2	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝6 公分、$\overline{BC}$＝10 公分
(3) $\overline{AC}^2$＝(10 公分)^2－(6 公分)^2 ＝64 平方公分	由(2) 等量減法公理
(4) $\overline{AC}$＝8 公分 或 $\overline{AC}$＝－8 公分	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{AC}$＝8 公分	由(4) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(6) △ABC 面積 ＝($\overline{AB}$×$\overline{AC}$)÷2 ＝(6 公分)×(8 公分)÷2 ＝24 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 & 已知$\overline{AB}$＝6 公分、(5) $\overline{AC}$＝8 公分 已證
(7) 此三角柱體的體積 ＝(24 平方公分)×(7 公分) ＝168 立方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 & (6) 底面△ABC 面積＝24 平方公分 & 已知三角柱體的高$\overline{BE}$＝7 公分

定義 9.3-7 正圓柱體

長方形繞其一邊旋轉一周，所圍成的立體叫做正圓柱體。
正圓柱體的上下兩面平行的平面，叫做兩底面，曲面為正圓柱體的側面。



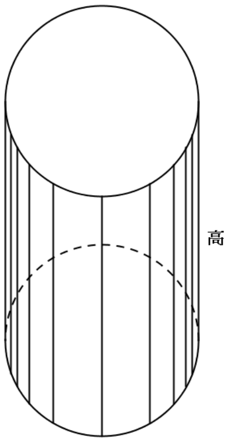
正圓柱體透視圖 **正圓柱體展開圖**

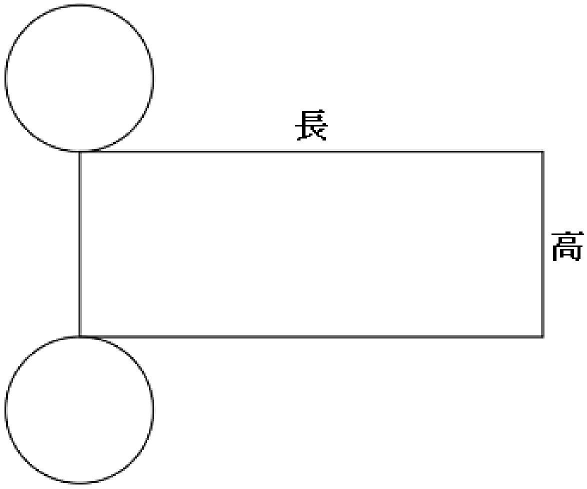
圖 9.3-38 正圓柱體的透視圖與展開圖

在圖 9.3-38 中，正圓柱體的上下兩底面互相平行，側面展開為一矩形，且底面的圓周長等於側面矩形的長，正圓柱體的高為側面矩形的高。

定理 9.3-7 正圓柱體的表面積定理

正圓柱體的表面積為側面積加上下底面積和。





正圓柱體透視圖　　　　　　　　　　**正圓柱體展開圖**

圖 9.3-39 正圓柱體的透視圖與展開圖

已知：如圖 9.3-39，若正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h

求證：正圓柱體的表面積＝$2\pi r^2+2\pi rh$

想法：將正圓柱體展開，所有面的面積和即為正圓柱體的表面積

證明：

敘述	理由
(1) 上底面圓面積 ＝下底面圓面積＝πr^2	圓面積為圓周率與半徑平方的乘積 & 已知正圓柱體的底面半徑為 r
(2) 底面圓周長＝$2\pi r$ (即側面矩形的長度＝$2\pi r$)	圓周長為直徑與圓周率的乘積 & 已知正圓柱體的底面半徑為 r & 側面矩形的長度為底面圓周長
(3) 側面矩形面積＝$(2\pi r)\times h$ ＝$2\pi rh$	矩形面積為長與寬之乘積 & 由(2) 側面矩形的長度＝$2\pi r$ & 已知正圓柱體的高為 h
(4) 正圓柱體的表面積 ＝上下底圓面積和＋側面矩形面積 ＝$2\pi r^2+2\pi rh$	表面積定義 & 將(1)式 & (3)式 代入

Q. E. D.

例題 9.3-25

圖 9.3-40 為一正圓柱體，已知其底面半徑為 2 公分，柱體的高為 5 公分，則此正圓柱體的表面積為何？

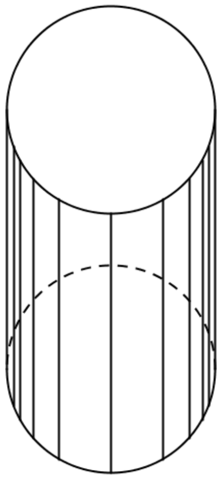


圖 9.3-40

想法：正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的表面積＝$2\pi r^2+2\pi rh$

解：

敘述	理由
(1) 正圓柱體表面積 ＝$2\pi\times(2$ 公分$)^2+2\pi\times(2$ 公分$)\times(5$ 公分$)$ ＝28π 平方公分	正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的表面積＝$2\pi r^2+2\pi rh$ & 已知正圓柱體的底面半徑為 2 公分，柱體的高為 5 公分

定理 9.3-8 正圓柱的體積定理

正圓柱的體積等於底面積乘以高。

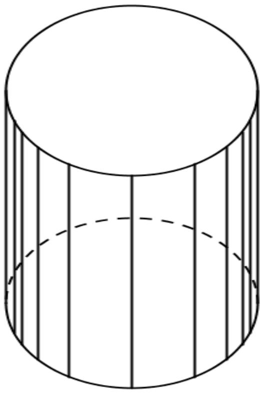


圖 9.3-41 正圓柱體透視圖

已知：若正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h
求證：正圓柱體的體積＝$\pi r^2 h$

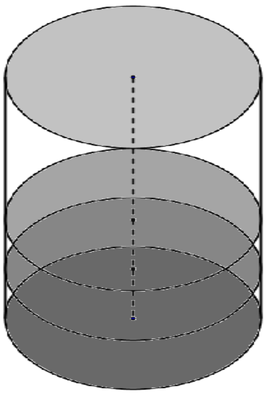


圖 9.3-42

想法：將正圓柱體切成平面，則所有平面面積之和即為正圓柱體的體積
證明：

敘述	理由
(1) 將正圓柱體切成平面，如圖 9.3-42 所示，則每個平面面積皆與底面積相等，且所有平面堆疊起來的高度為柱體的高	全量等於分量之和 **(註：此部份需用到微積分觀念，超出本書討論範圍)**
(2) 底面圓面積＝πr^2	圓面積為圓周率與半徑平方之乘積 & 已知正圓柱體的底面半徑為 r
(3) 所有平面面積之和即為正圓柱體之體積 ∴正圓柱體的體積＝$\pi r^2 h$	由(1) & (2) & 已知正圓柱體的高為 h

Q. E. D.

例題 9.3-26

圖 9.3-43 為一正圓柱體，已知其底面半徑為 2 公分，柱體的高為 5 公分，則此正圓柱體的體積為何？

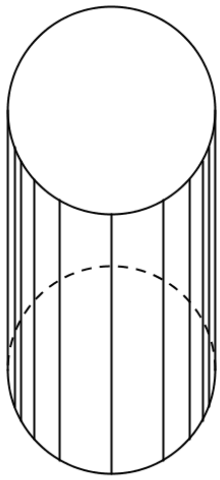


圖 9.3-43

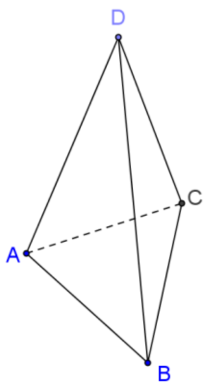
想法：正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的體積＝$\pi r^2 h$

解：

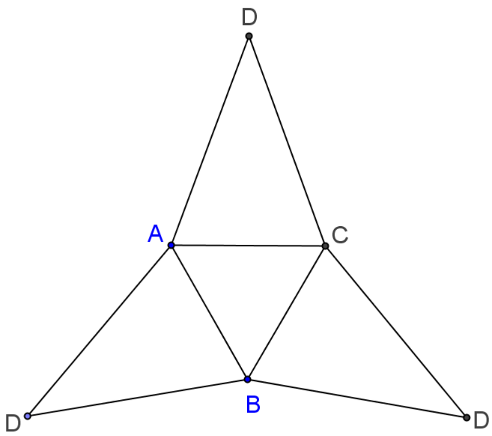
敘述	理由
(1) 正圓柱體體積 ＝$\pi\times(2$ 公分$)^2\times(5$ 公分$)$ ＝20π 立方公分	正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的體積＝$\pi r^2 h$ ＆ 已知正圓柱體的底面半徑為 2 公分，柱體的高為 5 公分

定義 9.3-8 角錐體

一個 n 多邊形和 n 個三角形所圍成的立體，叫做 n 角錐體。
若底面為正 n 多邊形，且側面 n 個三角形為 n 個全等的等腰三角形，則此錐體為正 n 角錐體。



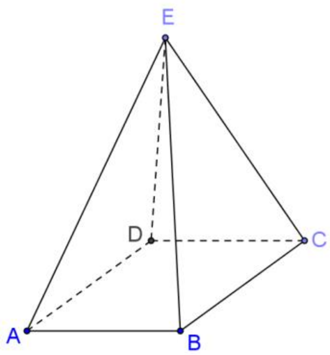
正三角錐體透視圖



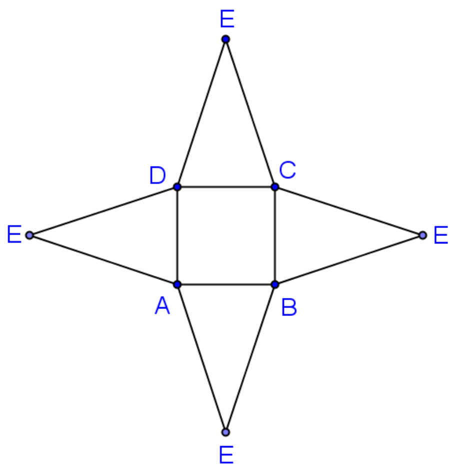
正三角錐體展開圖

圖 9.3-44 正三角錐體的透視圖與展開圖

上圖 9.3-44 中，正三角錐底面△ABC 為正三角形，側面△ABD、△BCD、△CAD 皆為等腰三角形，且△ABD ≅ △BCD ≅ △CAD。



正四角錐體透視圖



正四角錐體展開圖

圖 9.3-45 正四角錐體的透視圖與展開圖

上圖 9.3-45 中，正四角錐底面 ABCD 為正方形，側面△ABE、△BCE、△CDE、△DAE 皆為等腰三角形，且△ABE ≅ △BCE ≅ △CDE ≅ △DAE。

例題 9.3-27

完成以下表格：

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角錐					
四角錐					
五角錐					
n 角錐					

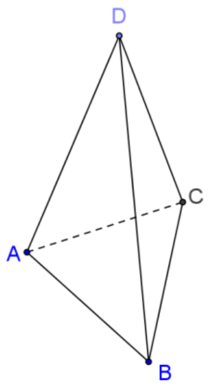


圖 9.3-46(a)

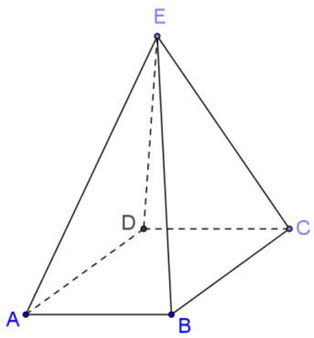


圖 9.3-46(b)

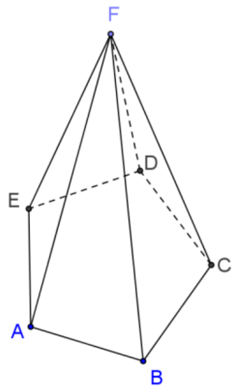


圖 9.3-46(c)

想法：利用角錐的定義

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-46(a)所示， 三角錐有 4 個面、4 個頂點、 6 條稜線，且底面為三角形、 3 個側面皆為三角形	三角錐定義 & 面與面的交線,叫做稜線, 稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-46(b)所示， 四角錐有 5 個面、5 個頂點、 8 條稜線，且底面為四邊形、 4 個側面皆為三角形	四角錐定義 & 面與面的交線,叫做稜線, 稜線與稜線的交點，叫做頂點

(3)	如圖 9.3-46(c)所示， 五角錐有 6 個面、6 個頂點、 10 條稜線，且底面為五邊形、 5 個側面皆為三角形	五角錐定義 ＆ 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點
(4)	n 角錐有(n＋1)個面、(n＋1)個頂點、(2n)條稜線，且底面為 n 邊形、n 個側面皆為三角形	n 角錐定義 ＆ 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點 ＆ 由(1)～(3) 歸納得知

例題 9.3-28

已知一四角錐的底面是一個邊長為 10 公分的正方形，且側面的四個三角形的面積都是 60 平方公分，求此四角錐的表面積。

想法：角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

解：

敘述	理由
(1) 四角錐的表面積 ＝底面正方形面積＋側面 4 個三角形面積 ＝(10 公分)×(10 公分)＋4×(60 平方公分) ＝340 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 ＆ 已知已知四角錐的底面是一個邊長為 10 公分的正方形，且側面的四個三角形的面積都是 60 平方公分

例題 9.3-29

圖 9.3-47 為一正三角錐的透視圖，其側面三角形的底$\overline{AB}$＝6 公分，高$\overline{DE}$＝8 公分，求此正三角錐的表面積。

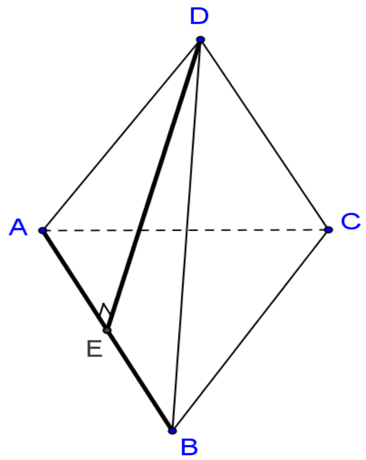


圖 9.3-47

想法：(1) 側面三角形面積為底與高乘積的一半

(2) 底面正三角形面積＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$(邊長)^2

(3) 角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

解：

敘述	理由
(1) △BCD 面積＝△ACD 面積 ＝△ABD 面積 ＝$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{DE}}{2}$ ＝$\dfrac{(6公分)\times(8公分)}{2}$ ＝24 平方公分	正三角錐側面 3 個三角形為全等之等腰三角形 ＆ 已知側面三角形的底$\overline{AB}$＝6 公分，高$\overline{DE}$＝8 公分 ＆ 三角形面積為底與高乘積的一半
(2) △ABC 面積 ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\overline{AB})^2$ ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(6公分)^2$ ＝$9\sqrt{3}$ 平方公分	正三角錐底面為一正三角形 ＆ 正三角形面積＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$(邊長)^2 ＆ 已知底面邊長$\overline{AB}$＝6 公分
(3) 正三角錐的表面積 ＝△ABC 面積＋3×△ABD 面積 ＝$9\sqrt{3}$ 平方公分＋3×(24 平方公分) ＝($72+9\sqrt{3}$) 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 ＆ (1) △BCD 面積＝△ACD 面積＝△ABD 面積＝24 平方公分、(2) △ABC 面積＝$9\sqrt{3}$ 平方公分

例題 9.3-30

圖 9.3-48 為正四角錐的展開圖，若底面為邊長為 10 公分的正方形，且側面等腰三角形的腰長為 13 公分，求此正四角錐的表面積。

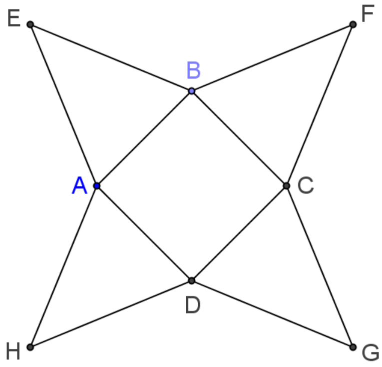


圖 9.3-48

想法：(1) 利用尺規作圖，作側面等腰三角形的高，並利用畢氏定理求出高之值

(2) 側面三角形面積為底與高乘積的一半

(3) 底面正方形面積為邊長平方

(4) 角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

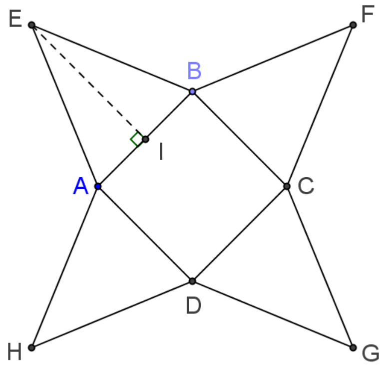


圖 9.3-48(a)

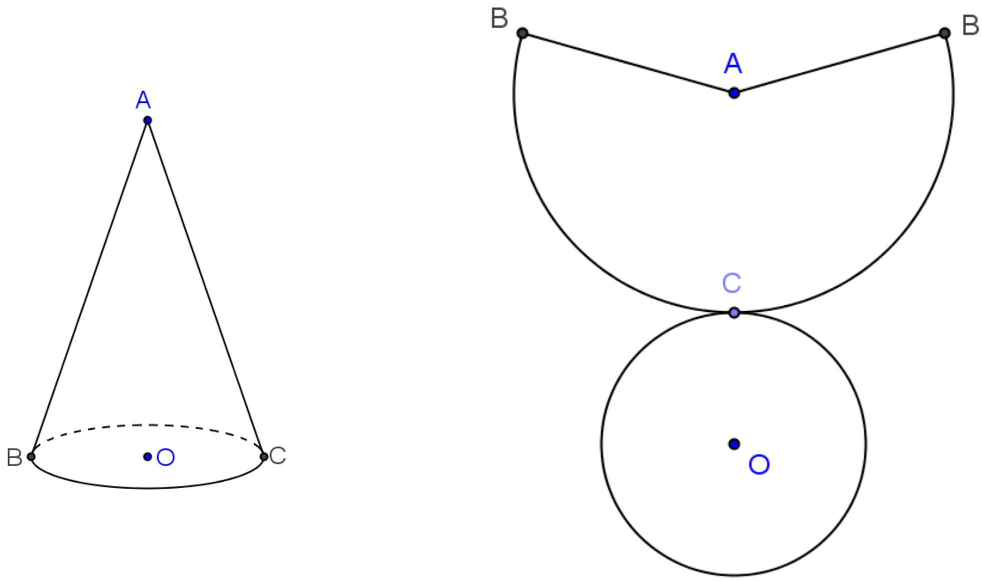
解：

敘述	理由
(1) 作∠AEB 的角平分線交$\overline{AB}$於 I 點，如圖 9.3-48(a)所示，則： $\overline{EI}\perp\overline{AB}$，∠EIA＝90°； $\overline{AI}=\overline{BI}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times(10\text{ 公分})$ $=5$ 公分	正四角錐 4 個側面均為等腰三角形 & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊 & 已知此正四角錐的底面為邊長為 10 公分的正方形

(2) △EIA 中，$\overline{EI}^2+\overline{AI}^2=\overline{AE}^2$	由(1) ∠EIA＝90° ＆ 畢氏定理
(3) $\overline{EI}^2$＋(5 公分)^2＝(13 公分)^2	由(2) ＆ (1) $\overline{AI}$＝5 公分、已知此正四角錐側面等腰三角形的腰長為 13 公分
(4) $\overline{EI}^2$＝(13 公分)^2－(5 公分)^2 ＝144 平方公分	由(3) 等量減法公理
(5) $\overline{EI}$＝12 公分 或 $\overline{EI}$＝－12 公分	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{EI}$＝12 公分	由(5) ＆ $\overline{EI}$為線段長度必大於 0
(7) △ABE 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{EI}}{2}$ $=\dfrac{(10公分)\times(12公分)}{2}$ ＝60 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 ＆ 已知此正四角錐的底面為邊長為 10 公分、(6) $\overline{EI}$＝12 公分
(8) 正方形 ABCD 面積 ＝(10 公分)^2 ＝100 平方公分	正方形面積為邊長平方 ＆ 已知此正四角錐的底面為邊長為 10 公分的正方形
(9) 此正四角錐的表面積 ＝正方形 ABCD 面積＋4×△ABE 面積 ＝100 平方公分＋4×(60 平方公分) ＝340 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 ＆ (8)正方形 ABCD 面積＝100 平方公分 (7) △ABE 面積＝60 平方公分

定義 9.3-9 直圓錐體

直圓錐體是由一個直角三角形繞其中一股旋轉一周所成的立體。直圓錐體的底面為圓形、側面展開為扇形，且底面圓形的圓周長恰為側面扇形的弧長。



直圓錐體透視圖 **直圓錐體展開圖**

圖 9.3-49 直圓錐體的透視圖與展開圖

在圖 9.3-49 中，直圓錐體展開後為底面為一圓 O、側面為一扇形 ABB，且側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}$等於底面圓 O 的周長。

例題 9.3-31

已知一直圓錐體底面半徑為 2 公分，側面展開扇形的半徑為 5 公分，則此直圓錐體的表面積為何？

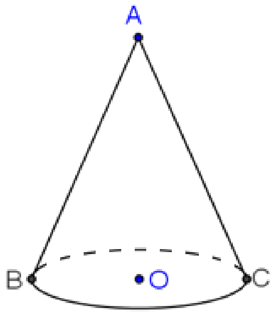


圖 9.3-50

想法：(1) 利用直圓錐體底面圓形的周長等於側面扇形的弧長，求出側面扇形的圓心角

(2) 直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和

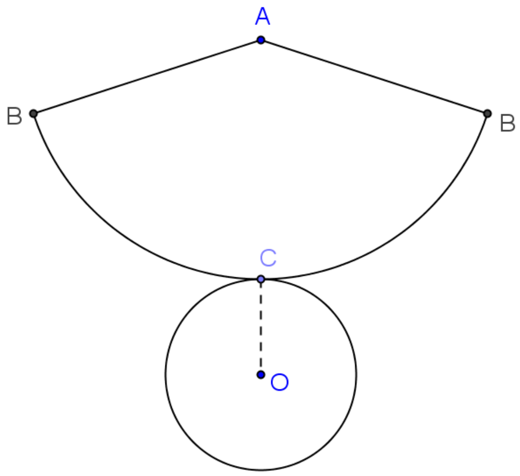


圖 9.3-50(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫直圓錐展開圖，如圖 9.3-50(a)所示，則：$\overline{OC}$＝2 公分、$\overline{AB}$＝5 公分	已知一直圓錐體底面半徑為 2 公分，側面展開扇形的半徑為 5 公分 & 作圖
(2) 底面圓 O 周長＝$2\times\pi\times$(2 公分) ＝4π 公分 底面圓 O 面積＝$\pi\times$(2 公分)^2 ＝4π 平方公分	圓周長為直徑與圓周率之乘積 & 已知底面圓半徑為 2 公分 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知底面圓半徑為 2 公分

(3) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}$ $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times$圓 A 周長 $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 2\times\pi\times$(5 公分) $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 10\pi$ 公分	扇形弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓周長 & 已知側面展開扇形的半徑為 5 公分
(4) $\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 10\pi$ 公分$=4\pi$ 公分	圓錐底面圓周長等於側面扇形弧長 & (2) 底面圓 O 周長$=4\pi$ 公分、 (3) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 10\pi$ 公分
(5) $\angle BAB=144°$	由(4) 求$\angle BAB$之值
(6) 側面扇形 BAB 面積 $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times$圓 A 面積 $=\dfrac{144^o}{360^o}\times\pi\times$(5 公分)^2 $=10\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (5) 扇形圓心角$\angle BAB=144°$ 、 已知側面展開扇形的半徑為 5 公分
(7) 此直圓錐表面積 $=(4\pi+10\pi)$ 平方公分 $=14\pi$ 平方公分	直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和 & (2) 底面圓 O 面積$=4\pi$ 平方公分、 (6) 側面扇形 BAB 面積$=10\pi$ 平方公分

例題 9.3-32

圖 9.3-51 為一圓錐體的展開圖，其側面扇形的圓心角為 120°，側面扇形的半徑為 15 公分，求此圓錐體的表面積。

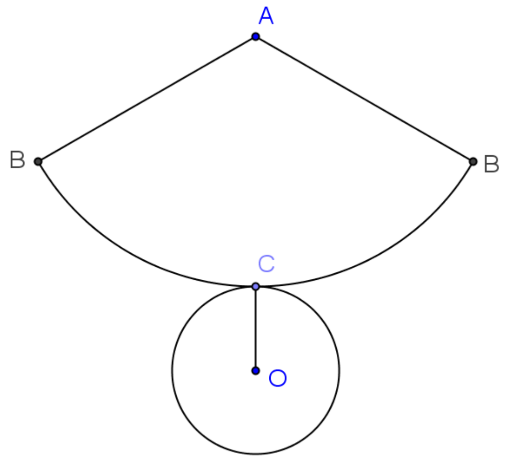


圖 9.3-51

想法：(1) 利用直圓錐體底面圓形的周長等於側面扇形的弧長，求出底面圓半徑

(2) 直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和

解：

敘述	理由
(1) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}$ $=\dfrac{\angle BAB}{360^\circ}\times$圓 A 周長 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times 2\times\pi\times(15$ 公分$)$ $=10\pi$ 公分	扇形弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓周長 & 已知側面扇形的圓心角為 120°，側面扇形的半徑為 15 公分
側面扇形 BAB 面積 $=\dfrac{\angle BAB}{360^\circ}\times$圓 A 面積 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times\pi\times(15$ 公分$)^2$ $=75\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知側面扇形的圓心角為 120°，側面扇形的半徑為 15 公分
(2) 底面圓 O 周長$=2\times\pi\times\overline{OC}$	圓周長為直徑與圓周率之乘積 & 底面圓 O 半徑為$\overline{OC}$

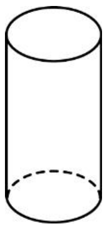
(3) $2\times\pi\times\overline{OC}=10\pi$ 公分	圓錐底面圓周長等於側面扇形弧長 & (2) 底面圓 O 周長$=2\times\pi\times\overline{OC}$、 (1) 側面扇形弧長$\widehat{BCB}=10\pi$ 公分
(4) $\overline{OC}=5$ 公分	由(3) 求$\overline{OC}$之值
(5) 底面圓 O 面積$=\pi\times(\overline{OC})^2$ $=\pi\times(5\text{ 公分})^2$ $=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (4) 底面圓 O 半徑$\overline{OC}=5$ 公分
(6) 此直圓錐表面積 $=(25\pi+75\pi)$ 平方公分 $=100\pi$ 平方公分	直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和 & (5) 底面圓 O 面積$=25\pi$ 平方公分、 (1) 側面扇形 BAB 面積$=75\pi$ 平方公分

在介紹完立方體、長方體、柱體以及錐體後，讓我們來作以下綜合題型的練習。

例題 9.3-33

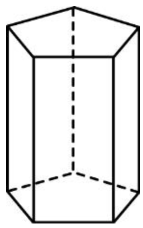
寫出下列各立體圖形的名稱：

(1)



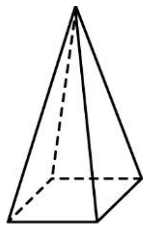
____

(2)



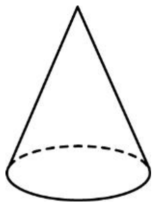
____

(3)



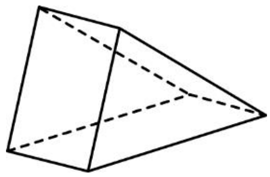
____

(4)



____

(5)



____

想法：利用各立體圖形的定義

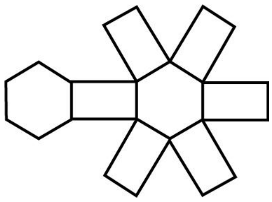
解：

敘述	理由
(1) 此圖形為直圓柱體的透視圖	直圓柱體的定義
(2) 此圖形為五角柱體的透視圖	五角柱體的定義
(3) 此圖形為四角錐體的透視圖	四角錐體的定義
(4) 此圖形為直圓錐體的透視圖	直圓錐體的定義
(5) 此圖形為三角柱體的透視圖	三角柱體的定義

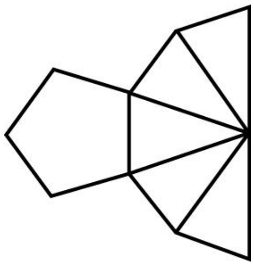
例題 9.3-34

寫出下列各展開圖所構成的立體圖形名稱：

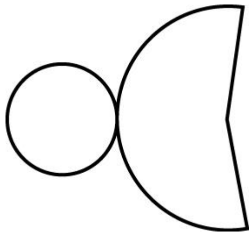
(1)



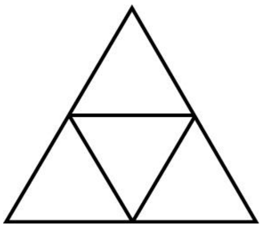
(2)



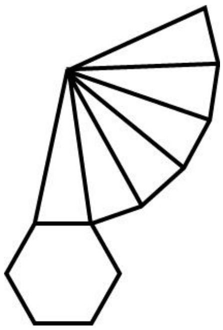
(3)



(4)



(5)



想法：利用各立體圖形的定義

解：

敘述	理由
(1)　此圖形為六角柱體的展開圖	六角柱體的定義
(2)　此圖形為五角錐體的展開圖	五角錐體的定義
(3)　此圖形為直圓錐體的展開圖	直圓錐體的定義
(4)　此圖形為三角錐體的展開圖	三角錐體的定義
(5)　此圖形為六角錐體的展開圖	六角錐體的定義

例題 9.3-35

完成以下表格：(以下柱體皆為直角柱)

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角柱					
四角柱					
n 角柱					
三角錐					
四角錐					
n 角錐					

想法：利用直角柱體與角錐體的定義

解：

敘述	理由
(1) 三角柱有 5 個面、6 個頂點、9 條稜線，且 2 個底面皆為三角形、3 個側面皆為矩形	三角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 四角柱有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線，且 2 個底面與 4 個側面皆為矩形	四角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(3) n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線，且 2 個底面皆為 n 邊形、n 個側面皆為矩形	n 角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點 & 由(1)、(2) 歸納得知
(4) 三角錐有 4 個面、4 個頂點、6 條稜線，且底面為三角形、3 個側面皆為三角形	三角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(5) 四角錐有 5 個面、5 個頂點、8 條稜線，且底面為四邊形、4 個側面皆為三角形	四角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(6) n 角錐有(n＋1)個面、(n＋1)個頂點、(2n)條稜線，且底面為 n 邊形、n 個側面皆為三角形	n 角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點 & 由(4)、(5) 歸納得知

完成之表格如下：

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角柱	5	6	9	2 個三角形	3 個矩形
四角柱	6	8	12	3 個矩形	4 個矩形
n 角柱	n+2	2n	3n	2 個 n 邊形	n 個矩形
三角錐	4	4	6	2 個三角形	3 個三角形
四角錐	5	5	8	1 個四邊形	4 個三角形
n 角錐	n+1	n+1	2n	1 個 n 邊形	n 個三角形

例題 9.3-36

求圖 9.3-52 中柱體的體積與表面積。(每個角皆為直角，長度單位為公分)

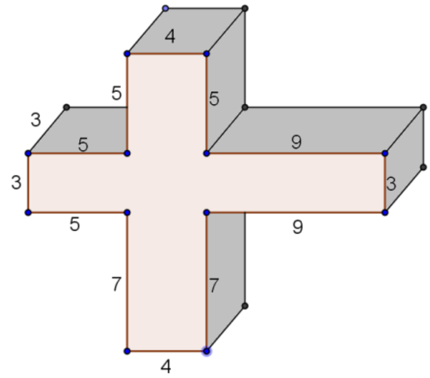


圖 9.3-52

想法：(1) 柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

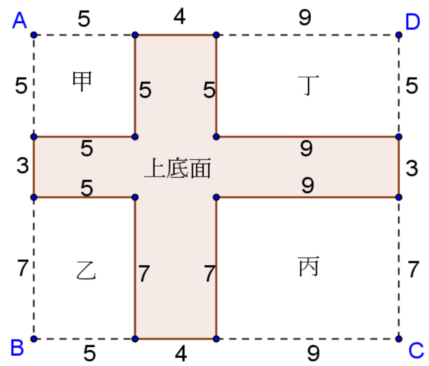


圖 9.3-52(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意，先求出柱體底面面積， 如圖 9.3-52(a)所示； 甲、乙、丙、丁皆為矩形，因此 甲面積＝(5 公分)×(5 公分) ＝25 平方公分 乙面積＝(5 公分)×(7 公分) ＝35 平方公分 丙面積＝(7 公分)×(9 公分) ＝63 平方公分 丁面積＝(9 公分)×(5 公分) ＝45 平方公分	已知每個角皆為直角，因此 圖 9.3-52(a)中甲、乙、丙、丁及四邊形 ABCD 皆為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積

(2) 矩形 ABCD 面積 $=\overline{AD}\times\overline{AB}$ ＝(18 公分)×(15 公分) ＝270 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積
(3) 上底面面積 ＝矩形 ABCD 面積－甲面積－乙面積－丙面積－丁面積 ＝(270－25－35－63－45)平方公分 ＝102 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 矩形 ABCD 面積＝270 平方公分 (1) 甲面積＝25 平方公分、 乙面積＝35 平方公分、 丙面積＝63 平方公分、 丁面積＝45 平方公分 已證
(4) 上底面周長 ＝(3＋5＋5＋4＋5＋9＋3＋9＋7＋4＋7＋5) 公分 ＝66 公分	周長定義 & 全量等於分量之和
(5) 柱體體積 ＝(上底面面積)×(柱體的高) ＝(102 平方公分)×(3 公分) ＝306 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 & (3) 上底面面積＝102 平方公分、 已知柱體的高為 3 公分(如圖 9.3-52 所示)
(6) 柱體表面積 ＝2×(上底面面積)＋(上底面周長)×(柱體的高) ＝2×(102 平方公分)＋(66 公分)×(3 公分) ＝204 平方公分＋198 平方公分 ＝402 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，角柱的表面積＝2A＋S×h & (3) 上底面面積＝102 平方公分、 (4) 上底面周長＝66 公分、 已知柱體的高為 3 公分(如圖 9.3-52 所示)

例題 9.3-37

圖 9.3-53 是一個階梯狀的柱體，每一階的高為 5 公分、寬為 10 公分，且柱高為 20 公分，求此柱體的體積與表面積。(每個角皆為直角，長度單位為公分)

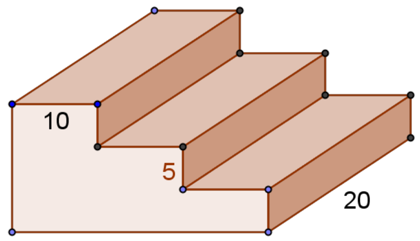


圖 9.3-53

想法：(1)　柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2)　角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

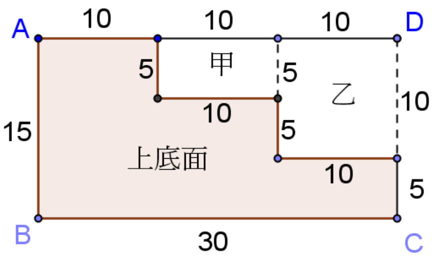


圖 9.3-53(a)

解：

敘述	理由
(1)　依題意，先求出柱體底面面積， 如圖 9.3-53(a)所示； 甲、乙皆為矩形，因此 甲面積＝(5 公分)×(10 公分) ＝50 平方公分 乙面積＝(10 公分)×(10 公分) ＝100 平方公分	已知每個角皆為直角，因此 圖 9.3-53(a)中甲、乙及四邊形 ABCD 皆為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積
(2)　矩形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{AB}$ ＝(30 公分)×(15 公分) ＝450 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積
(3)　上底面面積 ＝矩形 ABCD 面積－甲面積－乙面積 ＝(450－50－100) 平方公分 ＝300 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 矩形 ABCD 面積＝450 平方公分 (1) 甲面積＝50 平方公分、 乙面積＝100 平方公分　已證

(4) 上底面周長 ＝(10＋5＋10＋5＋10＋5＋30＋15)公分 ＝90 公分	周長定義 ＆ 全量等於分量之和
(5) 柱體體積 ＝(上底面面積)×(柱體的高) ＝(300 平方公分)×(20 公分) ＝6000 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 ＆ (3) 上底面面積＝300 平方公分、 已知柱體的高為 20 公分
(6) 柱體表面積 ＝2×(上底面面積)＋ (上底面周長)×(柱體的高) ＝2×(300 平方公分)＋(90 公分)×(20 公分) ＝600 平方公分＋1800 平方公分 ＝2400 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，角柱的表面積＝2A＋S×h ＆ (3) 上底面面積＝300 平方公分、 (4) 上底面周長＝90 公分、 已知柱體的高為 20 公分

例題 9.3-38

如圖 9.3-54，一個長為 8 公分，寬為 4 公分，高為 3 公分的長方體，截去$\frac{1}{4}$圓(半徑為 2 公分)的一角，求剩下柱體的體積與表面積。

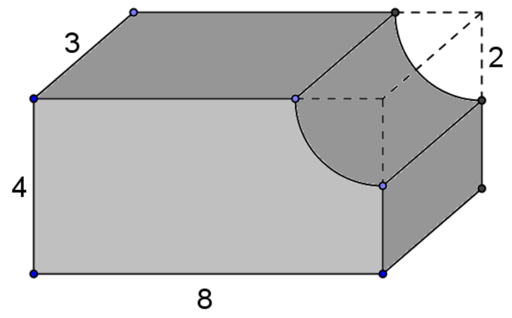


圖 9.3-54

想法：(1) 柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

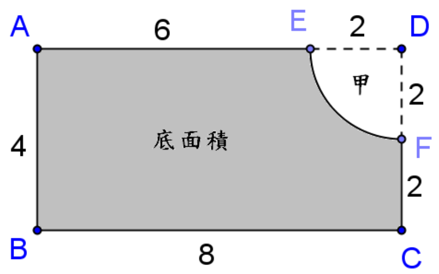


圖 9.3-54(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意，先求出柱體底面面積，如圖 9.3-54(a)所示； 矩形 ABCD 面積＝(4 公分)×(8 公分) ＝32 平方公分 甲扇形面積＝$\frac{1}{4}$圓面積 ＝$\frac{1}{4}\times\pi\times$(2 公分)^2 ＝$\pi$ 平方公分	長方體六個面皆為矩形 & 已知長方體的長為 8 公分，寬為 4 公分，高為 3 公分，截去$\frac{1}{4}$圓(半徑為 2 公分)的一角 & 矩形面積為長與寬之乘積 & 扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積
(2) 底面積＝矩形 ABCD 面積－甲面積 ＝(32－π) 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 矩形 ABCD 面積＝32 平方公分、甲扇形面積＝π 平方公分

(3) $\overset{\frown}{EF}=\frac{1}{4}$圓周長 $=\frac{1}{4}\times 2\times\pi\times$(2 公分) $=\pi$ 公分	弧長$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓周長 ＆ 已知截去$\frac{1}{4}$圓(半徑為 2 公分)的一角
(4) 底面周長 $=\overline{AE}+\overset{\frown}{EF}+\overline{FC}+\overline{BC}+\overline{AB}$ $=(6+\pi+2+8+4)$ 公分 $=(20+\pi)$ 公分	周長定義 ＆ 已知長方體的長為 8 公分，寬為 4 公分，高為 3 公分 ＆ (3) $\overset{\frown}{EF}=\pi$ 公分 已證
(5) 剩下柱體的體積 ＝(底面積)×(柱體的高) $=[(32-\pi)$ 平方公分]×(3 公分) $=(96-3\pi)$ 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 ＆ (2) 底面積$=(32-\pi)$ 平方公分、 已知長方體的高為 3 公分
(6) 剩下柱體的表面積 ＝2×(底面面積)＋ (底面周長)×(柱體的高) $=2\times[(32-\pi)$ 平方公分]＋ $[(20+\pi)$ 公分]×(3 公分) $=(124+\pi)$ 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，角柱的表面積＝2A＋S×h ＆ (2) 底面積$=(32-\pi)$ 平方公分、 (4) 底面周長$=(20+\pi)$ 公分、 已知長方體的高為 3 公分

例題 9.3-39

如圖 9.3-55，將兩個圓柱積木黏在一起，上層的圓柱積木半徑為 7 公分，高為 8 公分；下層的圓柱積木半徑為 10 公分，高為 12 公分，求此立體圖形的體積與表面積各為何？

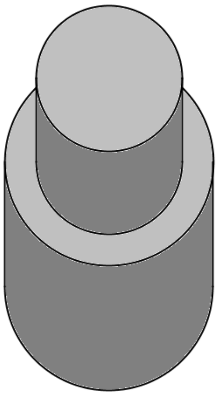


圖 9.3-55

想法：(1) 柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長

(3) 立體圖形的表面積等於展開後所有平面的總和

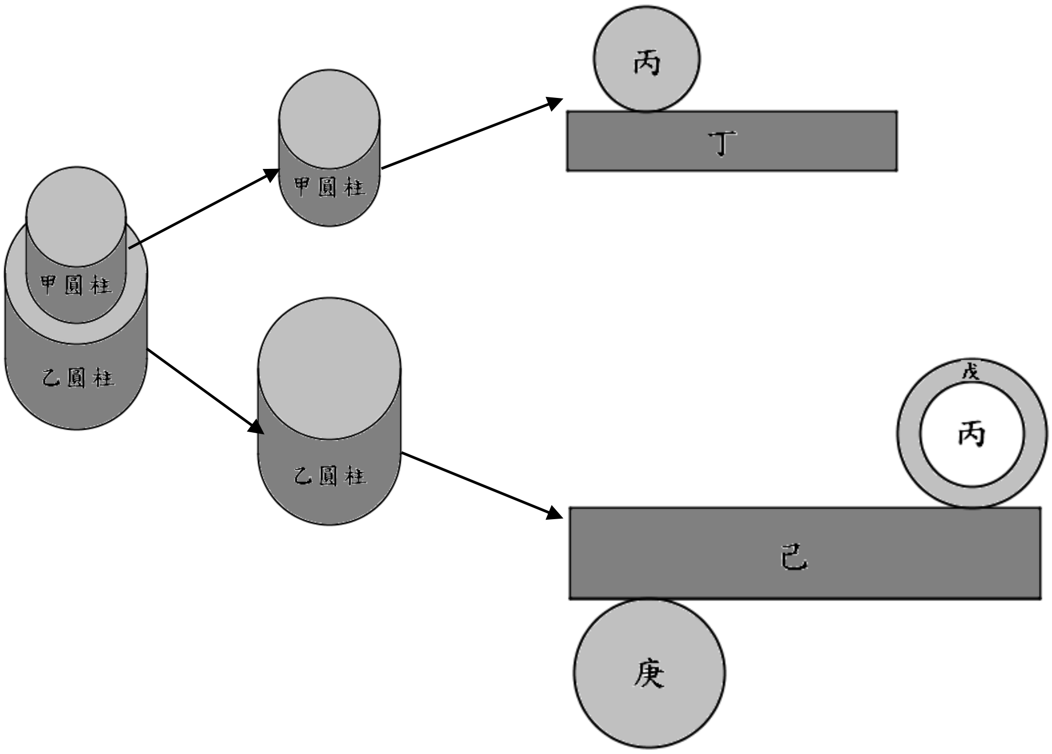


圖 9.3-55(a)

解：

敘述	理由
(1) 將此立體圖形拆開成為甲圓柱、乙圓柱；如圖 9.3-55(a)所示，則： 甲圓柱展開後為丙、丁兩平面，其中丙為半徑 7 公分的圓、丁為矩形； 乙圓柱展開後為戊、己、庚三平面，其中戊為半徑 10 公分的圓減去半徑 7 公分的圓所成的圓環、己為矩形、庚為半徑 10 公分的圓	全量等於分量之和 & 已知上層的圓柱積木半徑為 7 公分，高為 8 公分；下層的圓柱積木半徑為 10 公分，高為 12 公分
(2) 甲圓柱展開圖中， 丙圓面積 $=\pi\times(7\text{ 公分})^2$ $=49\pi$ 平方公分 丁矩形的長＝丙圓的周長 $=2\times\pi\times(7\text{ 公分})$ $=14\pi$ 公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 丙圓半徑為 7 公分 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長 & 圓周長為直徑與圓周率的乘積 & (1) 丙圓半徑為 7 公分
(3) 丁矩形面積 $=(14\pi\text{ 公分})\times(8\text{ 公分})$ $=112\pi$ 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) 丁矩形的長＝14π 公分、 已知上層的圓柱積木高為 8 公分
(4) 乙圓柱展開圖中， 戊圓環面積 $=\pi\times(10\text{ 公分})^2-\pi\times(7\text{ 公分})^2$ $=51\pi$ 平方公分 庚圓面積 $=\pi\times(10\text{ 公分})^2=100\pi$ 平方公分 己矩形的長 ＝庚圓的周長 $=2\times\pi\times(10\text{ 公分})$ $=20\pi$ 公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 戊為半徑 10 公分的圓減去半徑 7 公分的圓所成的圓環、 庚為半徑 10 公分的圓 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長 & 圓周長為直徑與圓周率的乘積 & (1) 庚為半徑 10 公分的圓
(5) 己矩形面積 $=(20\pi\text{ 公分})\times(12\text{ 公分})$ $=240\pi$ 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (4) 己矩形的長＝20π 公分、 已知下層的圓柱積木高為 12 公分
(6) 此立體圖形表面積 ＝丙面積＋丁面積＋戊面積＋己面積＋庚面積 $=(49\pi+112\pi+51\pi+240\pi+100\pi)$ 平方公分 $=552\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 丙圓面積＝49π 平方公分、 (3) 丁矩形面積＝112π 平方公分、 (4) 戊圓環面積＝51π 平方公分、 (5) 己矩形面積＝240π 平方公分、 (4) 庚圓面積＝100π 平方公分

(7) 甲圓柱體積 ＝丙面積×甲圓柱高 ＝(49π 平方公分)×(8 公分) ＝392π 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 & (2) 丙圓面積＝49π 平方公分、 已知上層的圓柱積木高為 8 公分
(8) 乙圓柱體積 ＝庚面積×乙圓柱高 ＝(100π 平方公分)×(12 公分) ＝1200π 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 & (4) 庚圓面積＝100π 平方公分、 已知下層的圓柱積木高為 12 公分
(9) 此立體圖形體積 ＝甲圓柱體積＋乙圓柱體積 ＝(392π＋1200π) 立方公分 ＝1592π 立方公分	全量等於分量之和 & (7) 甲圓柱體積＝392π 立方公分、 (8) 乙圓柱體積＝1200π 立方公分

例題 9.3-40

如圖 9.3-56，在一長 12 公分、寬 5 公分、高 6 公分的大長方體中，挖去一個長 7 公分、寬 4 公分、高 3 公分的小長方體，求此立體圖形的體積與表面積。

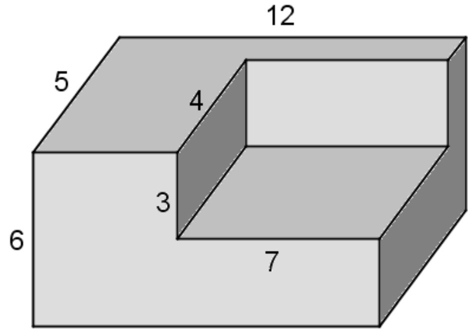


圖 9.3-56

想法：(1) 長方體體積等於長寬高三邊的乘積

(2) 長方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

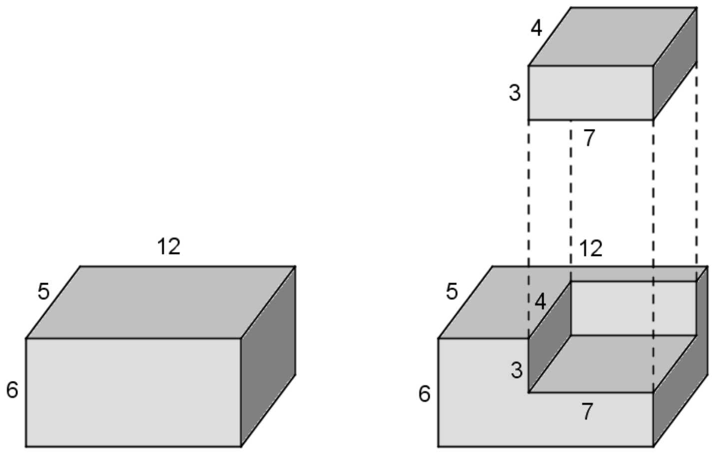


圖 9.3-56(a)

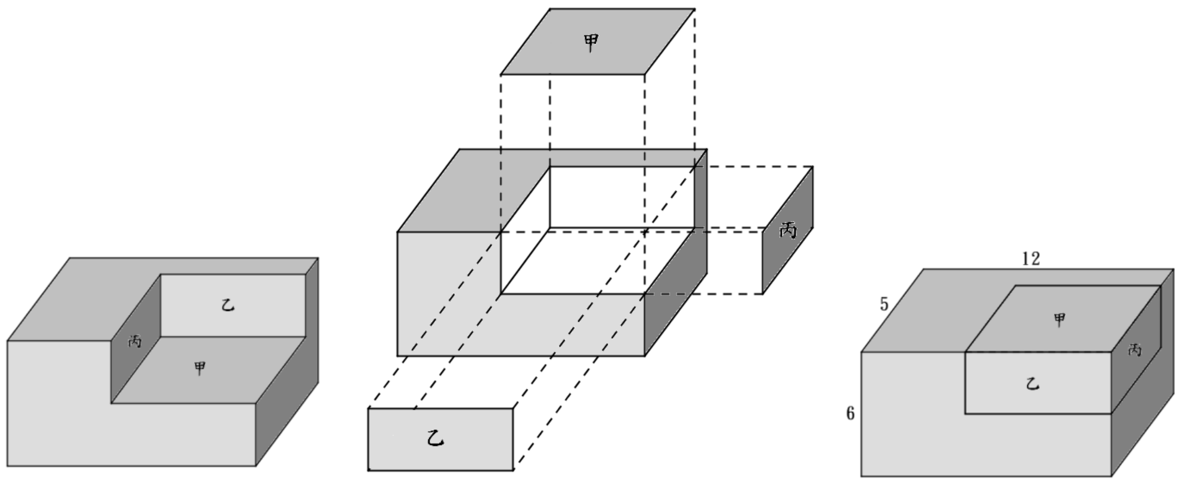


圖 9.3-56(b)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-56(a)中所示， 此立體圖形體積 ＝大長方體體積－小長方體體積 ＝(12 公分)×(5 公分)×(6 公分)－(7 公分)×(4 公分)×(3 公分) ＝(360－84) 立方公分 ＝276 立方公分	全量等於分量之和 & 長方體體積等於長寬高三邊的乘積 & 已知此立體圖形為在一長 12 公分、寬 5 公分、高 6 公分的大長方體中，挖去一個長 7 公分、寬 4 公分、高 3 公分的小長方體
(2) 如圖 9.3-56(b)中所示， 甲矩形可上下自由平移、 乙矩形可前後自由平移、 丙矩形可左右自由平移， 所以此立體圖形表面積 ＝大長方體的表面積 ＝2×[(12 公分)×(5 公分)＋(5 公分)×(6 公分)＋(6 公分)×(12 公分)] ＝2×(60＋30＋72) 平方公分 ＝324 平方公分	圖形平移其面積不變 & 長方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知大長方體的長 12 公分、寬 5 公分、高 6 公分

例題 9.3-41

將一底面積為 25π 平方公分，高為 12 公分的圓柱，切割成如圖 9.3-57 所示，求切割後立體圖形的體積。

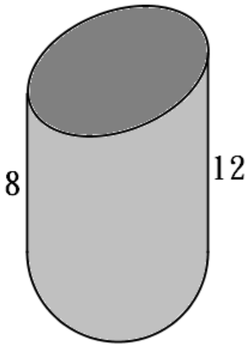


圖 9.3-57

想法：正圓柱的體積等於底面積乘以高

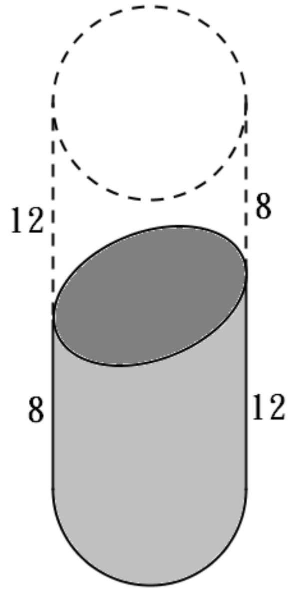


圖 9.3-57(a)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-57(a)所示，將 2 個題目中的立體圖形上下相疊合，會組合成一個底面積為 25π 平方公分，高為 20 公分的正圓柱體	全量等於分量之和 & 已知題目的立體圖形為底面積為 25π 平方公分，高為 12 公分的圓柱體所切割成的形體，切割後一邊的高仍為 12 公分，另一邊變為 8 公分 & 12 公分＋8 公分＝20 公分
(2) 因此題目所求立體圖形的體積為圖 9.3-57(a)中正圓柱體體積的一半 ＝[(25π 平方公分)×(20 公分)]÷2 ＝250π 立方公分	由(1) 將 2 個題目中的立體圖形上下相疊合，會組合成一個底面積為 25π 平方公分，高為 20 公分的正圓柱體 & 正圓柱的體積等於底面積乘以高

習題 9.3

習題 9.3-1

完成以下表格：

	立方體	長方體
面數		
面的形狀		
頂點數		
稜線數		

習題 9.3-2

已知一立方體的邊長為 5 公分，則此立方體的表面積為何？

習題 9.3-3

已知一立方體的表面積為 54 平方公分，則此立方體的邊長為何？

習題 9.3-4

已知一立方體的邊長變為原來的 2 倍，則此立方體的表面積變為原來的幾倍？

習題 9.3-5

已知一立方體的邊長為 5 公分，則此立方體的體積為何？

習題 9.3-6

已知一立方體的體積為 343 立方公分，則此立方體的邊長為何？

習題 9.3-7

若一立方體的邊長變為原來的 3 倍，則此立方體的體積變為原來的幾倍？

習題 9.3-8

已知一立方體的表面積為 216 平方公分，則此立方體的體積為何？

習題 9.3-9

已知一立方體的體積為 512 立方公分，則此立方體的表面積為何？

習題 9.3-10

若甲立方體的體積是乙立方體體積的 64 倍，則甲立方體的表面積是乙立方體表面積的幾倍？

習題 9.3-11

已知一長方體的長為 4 公分、寬為 3 公分、高為 2 公分，則此長方體的表面積為何？

習題 9.3-12

已知一長方體的長為 4 公分、寬為 5 公分，且其表面積為 220 平方公分，則此長方體的高為何？

習題 9.3-13

已知一長方體的長為 8 公分、寬為 6 公分、高為 4 公分，則此長方體的體積為何？

習題 9.3-14

有一長方體，其底面為邊長 6 公分的正方形，高為 10 公分，若將底面正方形邊長增加 4 公分，則高要變為幾公分，體積才不會改變？

習題 9.3-15

已知一長方體和一立方體的體積相同，若此長方體的長為 12 公分、寬為 6 公分、高為 3 公分，求立方體的表面積。

習題 9.3-16

完成以下表格：(以下柱體皆為直角柱)

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角柱					
四角柱					
五角柱					
n 角柱					

習題 9.3-17

若某個直角柱有 15 條稜邊、a 個頂點與 b 個面，求 $a \times b$ 之值為何？

習題 9.3-18

圖 9.3-58 為一六角柱體，已知其底面面積為 $54\sqrt{3}$ 平方公分，底面周長為 36 公分，若柱體的高為 3 公分，則此六角柱體的體積與表面積各為何？

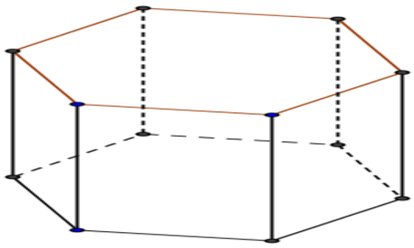


圖 9.3-58

習題 9.3-19

圖 9.3-59 是底面為梯形的四角柱，已知梯形的上底$\overline{AB}$＝12 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝18 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝8 公分且梯形另一邊$\overline{AD}$＝10 公分，若四角柱的高$\overline{FB}$＝20 公分，則此四角柱的體積與表面積各為何？

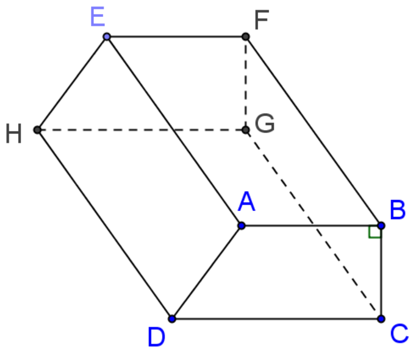


圖 9.3-59

習題 9.3-20

有一三角柱體，其底面為直角三角形，兩股長分別為 5 公分及 12 公分，若三角柱體的高為 10 公分，則此三角柱體的體積與表面積各為何？

習題 9.3-21

圖 9.3-60 為一正圓柱體，已知其底面半徑為 4 公分，柱體的高為 10 公分，則此正圓柱體的體積與表面積各為何？

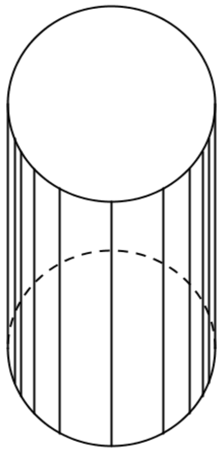


圖 9.3-60

習題 9.3-22

完成以下表格：

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角錐					
四角錐					
五角錐					
n 角錐					

習題 9.3-23

已知一四角錐的底面是一個邊長為 5 公分的正方形，且側面的四個三角形的面積都是 30 平方公分，求此四角錐的表面積。

習題 9.3-24

圖 9.3-61 為一正三角錐的透視圖，其側面三角形的底$\overline{AB}$＝3 公分，高$\overline{DE}$＝4 公分，求此正三角錐的表面積。

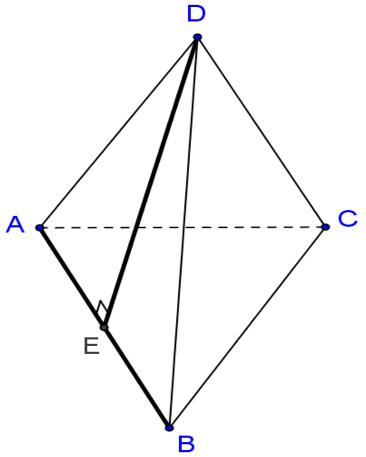


圖 9.3-61

習題 9.3-25

圖 9.3-62 為正四角錐的展開圖，若底面為邊長為 20 公分的正方形，且側面等腰三角形的腰長為 26 公分，求此正四角錐的表面積。

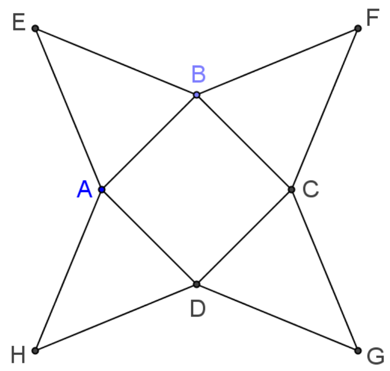


圖 9.3-62

習題 9.3-26

已知一直圓錐體底面半徑為 4 公分，側面展開扇形的半徑為 10 公分，則此直圓錐體的表面積為何？

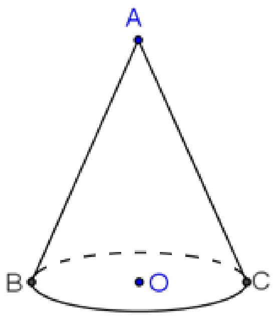


圖 9.3-63

習題 9.3-27

圖 9.3-64 為一圓錐體的展開圖，其側面扇形的圓心角為 180°，側面扇形的半徑為 20 公分，求此圓錐體的表面積。

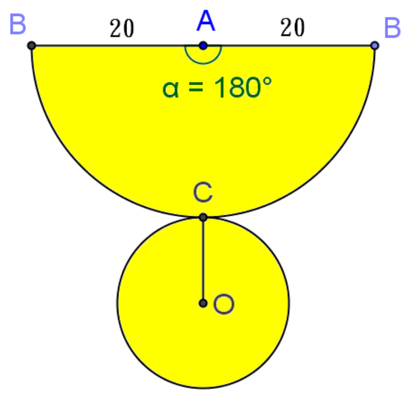
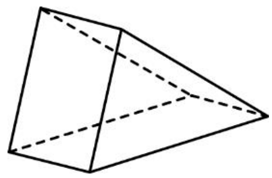


圖 9.3-64

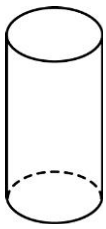
習題 9.3-28

寫出下列各立體圖形的名稱：

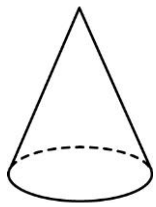
(1)



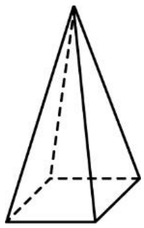
(2)



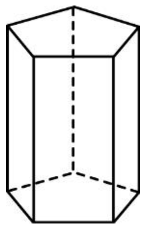
(3)



(4)



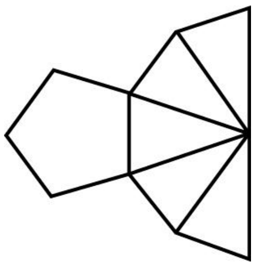
(5)



習題 9.3-29

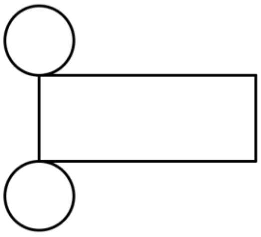
寫出下列各展開圖所構成的立體圖形名稱：

(1)



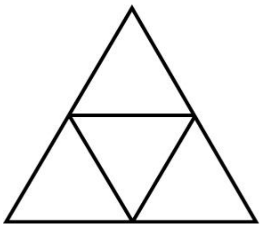
____

(2)



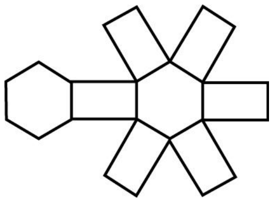
____

(3)



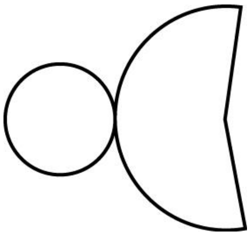
____

(4)



____

(5)



____

習題 9.3-30

如圖 9.3-65，有一「凸」形的柱體，求此柱體的體積與表面積。
（每個角皆為直角；單位：公分）

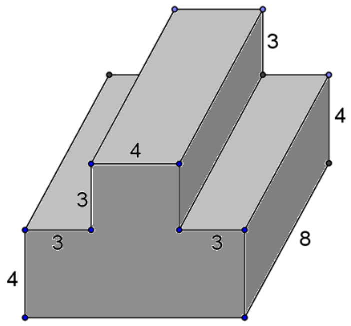


圖 9.3-65

習題 9.3-31

如圖 9.3-66，一個長為 8 公分，寬為 6 公分，高為 10 公分的長方體，中間挖去一半徑為 2 公分的圓柱，求剩下柱體的體積與表面積。

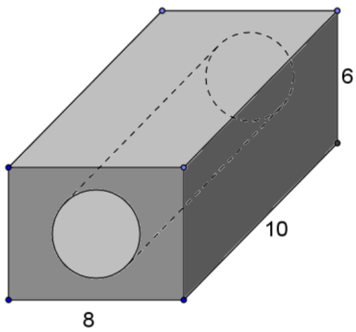


圖 9.3-66

習題 9.3-32

如圖 9.3-67，將兩個圓柱積木黏在一起，上層的圓柱積木半徑為 5 公分，高為 7 公分；下層的圓柱積木半徑為 8 公分，高為 10 公分，求此立體圖形的體積與表面積各為何？

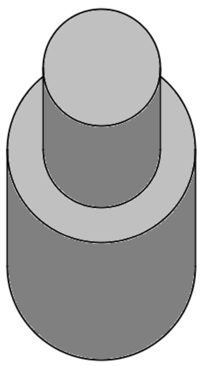


圖 9.3-67

習題 9.3-33

如圖 9.3-68，在一長 10 公分、寬 5 公分、高 7 公分的大長方體中，挖去一個長 6 公分、寬 4 公分、高 3 公分的小長方體，求此立體圖形的體積與表面積。

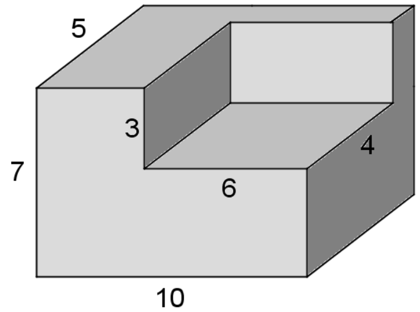


圖 9.3-68

習題 9.3-34

將一底面積為 100π 平方公分，高為 24 公分的圓柱，切割成如圖 9.3-69 所示，求切割後立體圖形的體積。

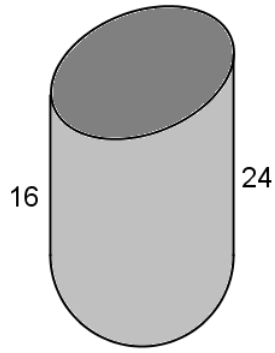


圖 9.3-69

本章重點

1. **矩形面積定理**：矩形面積為長與寬之乘積。

2. **正方形面積定理**：正方形面積為邊長平方。

3. **平行四邊形面積定理**：平行四邊形面積為底與高之乘積。

4. **三角形面積定理**：三角形面積為底與高乘積之一半。

5. **梯形面積定理**：梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半。

6. **圓面積定理**：圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積。

7. **扇形面積定理**：扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓面積。

8. 菱形面積為兩對角線乘積的一半。

9. 鳶行面積為兩對角線乘積的一半。

10. 海龍公式(利用三角形三邊長求三角形面積)：
    a、b、c 分別為△ABC 的三邊長，且假設 a＋b＋c＝2s。
    則△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

11. 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩個面積相等的三角形。

12. 邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位。

13. 直角三角形斜邊上的高等於兩股乘積除以斜邊長。

14. 同底等高的平行四邊形面積皆相等。

15. 同底等高之三角形面積皆相等。

16. 等高三角形面積比為底邊長之比。

17. 三角形三中線將此三角形平分成 6 個面積相等的小三角形。

18. 三角形的重心與此三角形三頂點的連線，將此三角形平分成 3 個面積相等的三角形。

19. 四邊形兩對角線所形成的四個三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積。

20. 平行四邊形兩對角線將此平行四邊形平分成 4 個等面積的三角形。

21. 梯形面積為梯形中線長與高的乘積。

22. 相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比。

23. 相似多邊形面積比等於對應邊的平方比。

24. **圓面積比定理**：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比。

25. **正多邊形周長比定理**：兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比。

26. **圓周比定理**：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比。

27. **圓周長定理**：圓周長等於直徑乘以圓周率。

28. **圓弧長定理**：圓弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長。

29. **正多邊形外接圓定理**：任何邊數的正多邊形必有一外接圓。

30. **正多邊形內切圓定理**：任何邊數的正多邊形必有一內切圓。

31. n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線，且 2 個底面皆為 n 邊形、n 個側面皆為矩形。

32. **立方體表面積定理**：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍。

33. **長方體的表面積定理**：已知長方體的長為 a、寬為 b、高為 c，則長方體之表面積$=2(a\times b+b\times c+c\times a)$。

34. **多角柱體的表面積定理**：若角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱的表面積$=2A+S\times h$

35. **正圓柱體的表面積定理**：若正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的表面積$=2\pi r^2+2\pi rh$。

36. **立方體體積定理**：立方體體積等於邊長的立方。

37. **長方體體積定理**：長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積。

38. **多角柱體的體積定理**：角柱的體積等於底面積乘以角柱的高。

39. **正圓柱體的體積定理**：正圓柱的體積等於底面積乘以高。

40. n 角錐有(n＋1)個面、(n＋1)個頂點、(2n)條稜線，且底面為 n 邊形、n 個側面皆為三角形。

歷年基測題目

1. 如圖 9-1，長方形 ABCD 中，E 點在$\overline{BC}$上，且$\overline{AE}$平分∠BAC。若$\overline{BE}$＝4 公分，$\overline{AC}$＝15 公分，則△AEC 面積為何？ **(98-1)**

(A) 15 平方公分　(B) 30 平方公分　(C) 45 平方公分　(D) 60 平方公分

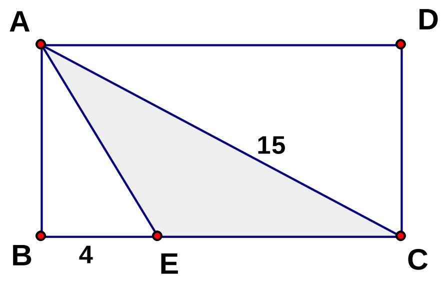


圖 9-1

解答：(B) 30 平方公分

想法： (1) 利用角平分線上任一點到角的兩邊等距離，找出△AEC 的高

(2) 三角形面積定理

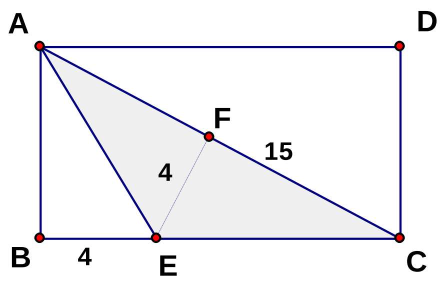


圖 9-1(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 E 點作$\overline{AC}$的垂直線交$\overline{AC}$於 F 點，如圖 9-1(a)所示，則∠B＝∠AFE＝90°	作圖 ＆ 已知 ABCD 為長方形 長方形四個角皆為直角
(2) $\overline{EF}$＝$\overline{BE}$＝4 公分	由(1) ＆ 已知$\overline{AE}$平分∠BAC 角平分線上任一點到角的兩邊等距離 ＆ 已知$\overline{BE}$＝4 公分
(3) △AEC 面積 $=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{EF}}{2}=\dfrac{(15公分)\times(4公分)}{2}$ ＝30 平方公分	三角形面積定理 ＆ 已知$\overline{AC}$＝15 公分

2. 如圖 9-2，在水平桌面上有甲、乙兩個內部呈圓柱形的容器，內部底面積分別為 $80cm^2$、$100cm^2$，且甲容器裝滿水，乙容器是空的。若將甲中的水全部倒入乙中，則乙中的水位高度比原先甲的水位高度低了 8cm，求甲容積為何？**(98-1)**

(A) $1280cm^3$　(B) $2560cm^3$　(C) $3200cm^3$　(D) $4000cm^3$

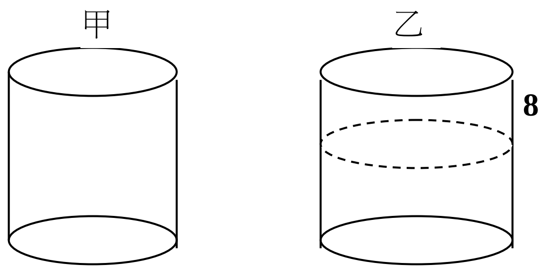


圖 9-2

解答：(C) $3200cm^3$

想法：圓柱體之體積＝底面積×柱體的高

解：

敘述	理由
(1) 設甲容器的高度為 h cm， 則乙容器高度為(h－8) cm	假設 & 已知乙中的水位高度比原先甲的水位高度低了 8cm
(2) $(80cm^2)\times(hcm)=(100cm^2)\times[(h-8)\ cm]$ $80h=100h-800$ $20h=800$ $h=40$	由(1) & 甲、乙容器內部底面積分別為 $80cm^2$、$100cm^2$，且甲容器裝滿水，乙容器是空的。若將甲中的水全部倒入乙中，則水的體積不變 & 圓柱體之體積＝底面積×柱體的高
(3) 甲容器體積$=(80cm^2)\times(hcm)$ $=(80cm^2)\times(40cm)$ $=3200\ cm^3$	圓柱體之體積＝底面積×柱體的高 & 已知甲容器內部底面積為 $80cm^2$ & (2)　h＝40　已證

3. 如圖 9-3，阿倉用一張邊長為 27.6 公分的正方形厚紙板，剪下邊長皆為 3.8 公分的四個正方形，形成一個有眼、鼻、口的面具。求此面具的面積為多少平方公分？(97-1)

(A) 552　(B) 566.44　(C) 856.88　(D)704

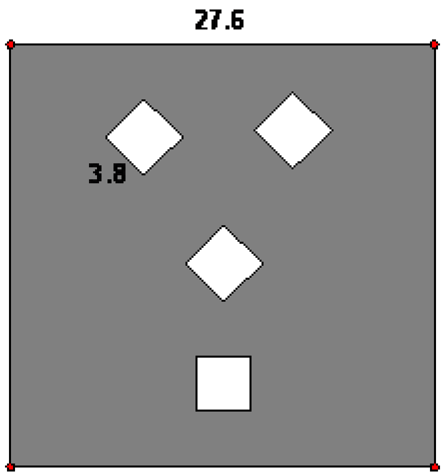


圖 9-3

解答：(D)704

想法：正方形面積為邊長的平方

解：

敘述	理由
(1) 大正方形面積＝(27.6 公分)^2 ＝761.76 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知厚紙板為邊長 27.6 公分的正方形
(2) 小正方形面積＝(3.8 公分)^2 ＝14.44 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知剪下邊長為 3.8 公分的正方形
(3) 面具的面積 ＝大正方形面積－四個小正方形面積 ＝(761.76 平方公分)－4×(14.44 平方公分) ＝704 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 大正方形面積＝761.76 平方公分 (2) 小正方形面積＝14.44 平方公分

4. 圖 9-4 為△ABC 與△DEC 重疊的情形，其中 E 在$\overline{BC}$上，$\overline{AC}$交$\overline{DE}$於 F 點，且$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$。若△ABC 與△DEC 的面積相等，且$\overline{EF}$＝9 公分，$\overline{AB}$＝12 公分，則$\overline{DF}$＝？

(A) 3 公分　(B) 7 公分　(C) 12 公分　(D) 15 公分　**(97-1)**

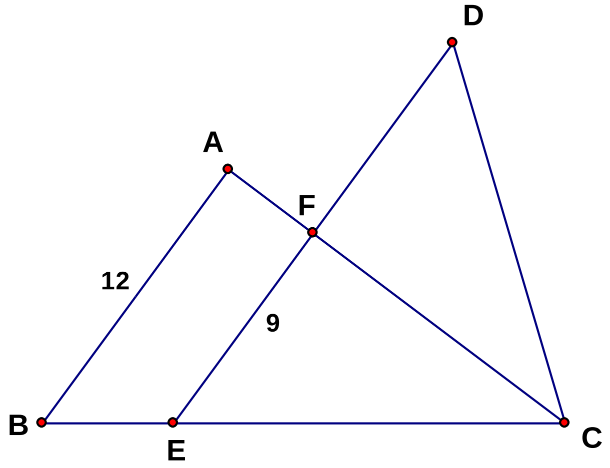


圖 9-4

解答：(B) 7 公分

想法： (1) 相似三角形之對應邊成比例

(2) 三角形面積為底與高乘積之一半

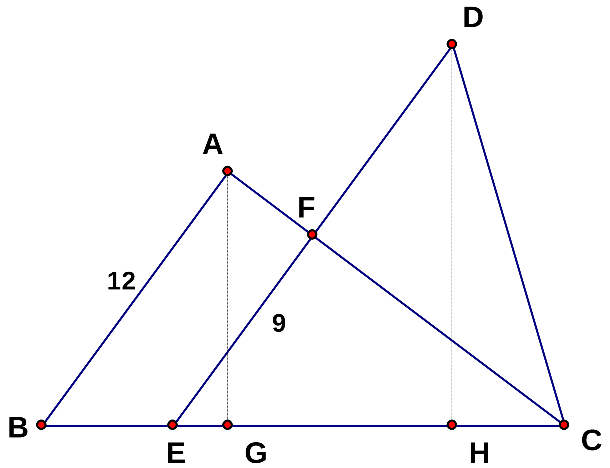


圖 9-4(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點與 D 點作$\overline{BC}$的垂直線，分別交於 G 點與 H 點，如圖 9-4(a)所示，則$\overline{AG}$為$\overline{BC}$上的高、$\overline{DH}$為$\overline{EC}$上的高	過線外一點垂直線作圖

(2) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AG}}{2}$ △DEC 面積＝$\dfrac{\overline{EC}\times\overline{DH}}{2}$	三角形面積為底與高乘積之一半 & (1) $\overline{AG}$為$\overline{BC}$上的高、$\overline{DH}$為$\overline{EC}$上的高
(3) $\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AG}}{2}=\dfrac{\overline{EC}\times\overline{DH}}{2}$	由(2) & 已知△ABC 與△DEC 的面積相等
(4) $\overline{BC}\times\overline{AG}=\overline{EC}\times\overline{DH}$	由(3) 等量乘法公理
(5) $\overline{BC}:\overline{EC}=\overline{DH}:\overline{AG}$	由(4) 外項乘積等於內項乘積
(6) 在△ABC 與△FEC 中 ∠B＝∠FEC ∠A＝∠EFC ∠ACB＝∠FCE	如圖 9-4(a)所示 已知$\overline{AB}\parallel\overline{DE}$ & 同位角相等 已知$\overline{AB}\parallel\overline{DE}$ & 同位角相等 共同角
(7) 所以△ABC～△FEC	由(6) & 根據(AAA)三角形相似定理
(8) $\overline{BC}:\overline{EC}=\overline{AB}:\overline{FE}$	由(7) & 相似多邊形對應邊成比例
(9) $\overline{DH}:\overline{AG}=\overline{AB}:\overline{FE}$ ＝(12 公分)：(9 公分) ＝4：3	由(5) & (7) 遞移律 已知$\overline{AB}$＝12 公分，$\overline{EF}$＝9 公分 倍比定理
(10) 在△ABG 與△DEH 中 ∠B＝∠DEH ∠BGA＝∠EHD＝90° ∠BAG＝∠EDH	如圖 9-4(a)所示 已知$\overline{AB}\parallel\overline{DE}$ & 同位角相等 由(1) 作圖 ∠BAG＝180°－∠B－∠BGA ＝180°－∠DEH－∠EHD ＝∠EDH
(11) 所以△ABG～△DEH	由(10) & 根據(AAA)三角形相似定理
(12) $\overline{AG}:\overline{DH}=\overline{AB}:\overline{DE}$	由(11) & 相似多邊形對應邊成比例
(13) 3：4＝(12 公分)：$\overline{DE}$	將(9) $\overline{DH}:\overline{AG}=4:3$ & 已知$\overline{AB}$＝12 公分　代入(12)式得
(14) 3×$\overline{DE}$＝4×(12 公分)	由(13) & 外項乘積等於內項乘積
(15) $\overline{DE}$＝4×(12 公分)÷3＝16 公分	由(14) 等量除法公理
(16) $\overline{DF}=\overline{DE}-\overline{EF}$ ＝(16 公分)－(9 公分)＝7 公分	全量等於分量之和 & (15) $\overline{DE}$＝16 公分、已知$\overline{EF}$＝9 公分

5. 如圖 9-5，G 是ΔABC 的重心，直線 L 過 A 點與$\overline{BC}$平行。若$\overleftrightarrow{CG}$分別與$\overline{AB}$、L 交於 D、E 兩點，$\overleftrightarrow{BG}$與$\overline{AC}$交於 F 點，$\overleftrightarrow{AG}$與$\overline{BC}$交於 H 點，則△AED 的面積：四邊形 ADGF 的面積＝？(97-1)

(A) 1：2　(B) 2：1 (C) 2：3 (D) 3：2

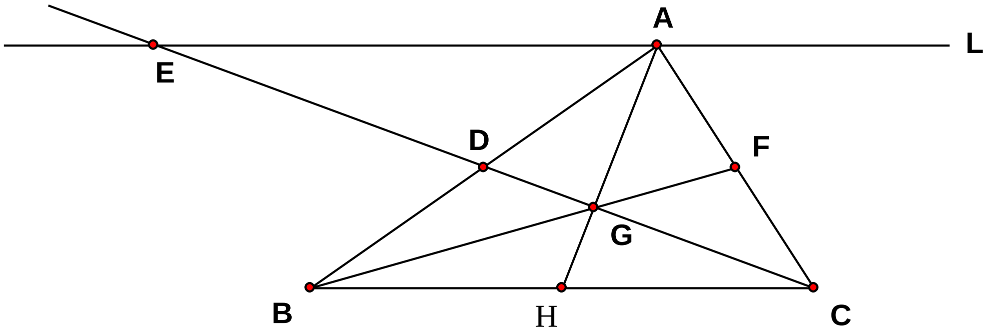


圖 9-5

解答：(D) 3：2

想法： (1) 三角形三中線將此三角形面積六等份，因此四邊形 ADGF 的面積為△ABC 面積的$\dfrac{2}{6}$倍

(2) 三角形三中線將此三角形面積六等份，因此△BCD 面積為△ABC 面積的$\dfrac{3}{6}$倍

(3) 若能證得△AED ≅ △BCD，則可得△AED 面積為△ABC 面積的$\dfrac{3}{6}$倍

(4) 因此△AED 的面積：四邊形 ADGF 的面積＝3：2

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AH}$、$\overline{BF}$與$\overline{CD}$為△ABC 之三中線	已知 G 是△ABC 的重心，$\overleftrightarrow{CG}$與$\overline{AB}$交於 D 點，$\overleftrightarrow{BG}$與$\overline{AC}$交於 F 點，$\overleftrightarrow{AG}$與$\overline{BC}$交於 H 點 & 三角形重心為三中線之交點
(2) △AGD＝△AGF＝△BGD ＝△BGH＝△CGH＝$\dfrac{1}{6}$△ABC 面積	由(1) & 三角形三中線將此三角形面積六等份

(3) 四邊形 ADGF 的面積 $=\triangle AGD+\triangle AGF$ $=\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC$ $=\frac{2}{6}\triangle ABC$ 面積	由(2) $\triangle AGD=\triangle AGF=\frac{1}{6}\triangle ABC$ & 全量等於分量之和
(4) $\triangle BCD$ 面積 $=\triangle BGD+\triangle BGH+\triangle CGH$ $=\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC$ $=\frac{3}{6}\triangle ABC$ 面積	由(2) $\triangle BGD=\triangle BGH=\triangle CGH$ $=\frac{1}{6}\triangle ABC$ 面積 & 全量等於分量之和
(5) 在$\triangle AED$與$\triangle BCD$中 $\angle AED=\angle BCD$ $\angle EAD=\angle CBD$ $\overline{AD}=\overline{BD}$	如圖 9-5 所示 已知直線 L 過 A 點與$\overline{BC}$平行 & 內錯角相等 由(1) $\overline{CD}$為$\triangle ABC$之三中線
(6) $\triangle AED \cong \triangle BCD$	由(5) & 根據 A.A.S.三角形全等定理
(7) $\triangle AED$ 面積$=\triangle BCD$ 面積 $=\frac{3}{6}\triangle ABC$ 面積	由(6) & (4) 遞移律
(8) $\triangle AED$ 的面積：四邊形 ADGF 的面積 $=\frac{3}{6}\triangle ABC$ 面積：$\frac{2}{6}\triangle ABC$ 面積 $=3:2$	題目所求 由(7) & (3) 倍比定理

6. 如圖 9-6，有兩個三角錐 ABCD、EFGH，其中甲、乙、丙、丁分別表示△ABC、△ACD、△EFG、△EGH。若∠ACB＝∠CAD＝∠EFG＝∠EGH＝70°，∠BAC＝∠ACD＝∠EGF＝∠EHG＝50°。則下列敘述何者正確？　**(97-1)**

(A) 甲、乙全等，丙、丁全等　　**(B)** 甲、乙全等，丙、丁不全等

(C) 甲、乙不全等，丙、丁全等　　**(D)** 甲、乙不全等，丙、丁不全等

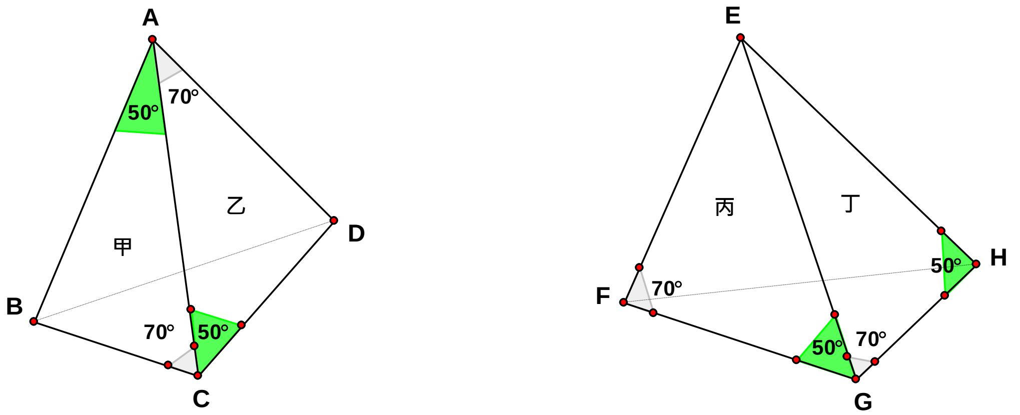


圖 9.6

解答：(B) 甲、乙全等，丙、丁不全等

想法：判斷三角形全等的方法有

1. S.A.S.三角形全等
2. S.S.S.三角形全等
3. A.A.S.三角形全等
4. A.S.A.三角形全等
5. R.S.H.三角形全等

解：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△CDA 中	如圖 9.6 所示
∠BAC＝∠ACD＝50°	已知
$\overline{AC}=\overline{CA}$	共同邊
∠ACB＝∠CAD＝70°	已知
(2) △ABC ≅ △CDA(即甲、乙全等)	由(1) 根據 A.S.A.三角形全等定理 ＆ 已知甲、乙分別表示△ABC、△ACD
(3) 丙、丁不全等	已知條件並無符合三角形全等的五種條件
(4) 所以答案選**(B)**	由(2) ＆ (3)

7. 如圖 9.7，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{BC}=12$，M 為$\overline{BC}$中點，M 到$\overline{AD}$的距離為 8。若分別以 B、C 為圓心，$\overline{BM}$長為半徑畫弧，交$\overline{AB}$、$\overline{CD}$於 E、F 兩點，則圖 9.7 中灰色區域面積為何？ **(96-1)**

(A) 96-12π (B) 96-18π (C) 96-24π (D) 96-27π

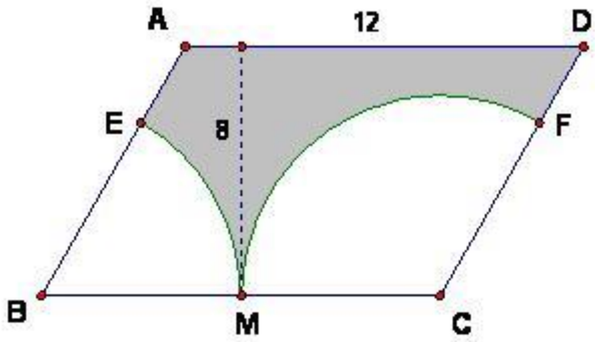


圖 9.7

解答：(B) 96-18π

想法： 灰色區域面積

＝平行四邊形 ABCD 面積－(扇形 BEM 面積＋扇形 CFM 面積)

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積$=12\times8=96$	平行四邊形面積為底與高之乘積 & 已知$\overline{BC}=12$，M 到$\overline{AD}$的距離為 8
(2) $\overline{BM}=\overline{CM}=6$	已知$\overline{BC}=12$，M 為$\overline{BC}$中點
(3) 扇形 BEM 面積 $=\dfrac{\angle EBM}{360^\circ}\times\pi\times\overline{BM}^2$ $=\dfrac{\angle EBM}{360^\circ}\times\pi\times6^2$	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知以 B 為圓心，$\overline{BM}$長為半徑畫弧 & (2) $\overline{BM}=6$
(4) 扇形 CFM 面積 $=\dfrac{\angle FCM}{360^\circ}\times\pi\times\overline{CM}^2$ $=\dfrac{\angle FCM}{360^\circ}\times\pi\times6^2$	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知以 C 為圓心，$\overline{BM}$長為半徑畫弧 & (2) $\overline{CM}=6$

(5) 扇形 BEM 面積＋扇形 CFM 面積 $=\frac{\angle EBM}{360^\circ}\times\pi\times6^2+\frac{\angle FCM}{360^\circ}\times\pi\times6^2$ $=\frac{\angle EBM+\angle FCM}{360^\circ}\times\pi\times6^2$ $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times\pi\times6^2$ $=18\pi$	由(3) ＆ (4) 已知 ABCD 為平行四邊形 ＆ 平行四邊形鄰角互補 ∴ $\angle EBM+\angle FCM=180^\circ$
(6) 灰色區域面積 ＝平行四邊形 ABCD 面積－ (扇形 BEM 面積＋扇形 CFM 面積) ＝96－18π	如圖 9.7 所示 ＆ 由(1) ＆ (5)
(7) 所以本題選**(B)**	由(6)

8. 如圖 9.8-1，水平地面上有一面積為 30π平方公分的扇形 OAB，其中$\overline{OA}$的長度為 6 公分，且與地面垂直。若在沒有滑動的情況下，將圖 9.8-1 的扇形向右滾動至$\overline{OB}$垂直地面為止，如圖 9.8-2 所示，則 O 點移動多少公分？**(96-1)**

(A) 20　　**(B)** 24　　**(C)** 10π　　**(D)** 30π

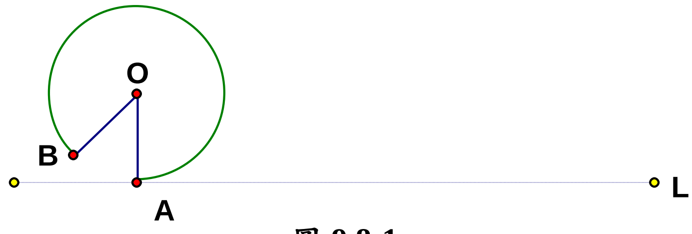


圖 9.8-1

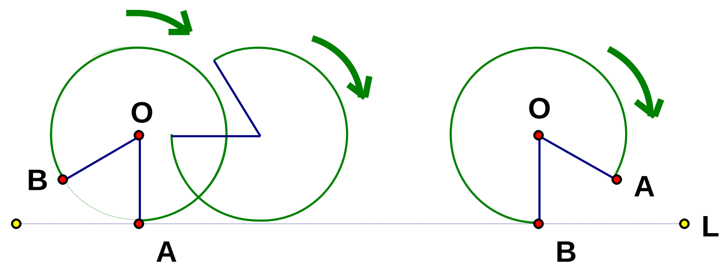


圖 9.8-2

解答：(C) 10π

想法： (1) 扇形面積定理　(2)圓弧長定理　(3) O 點移動距離即為$\overset{\frown}{AB}$長度

解：

敘述	理由
(1) 30π 平方公分$=\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times\pi\times\overline{OA}^2$ $=\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times\pi\times(6\text{ 公分})^2$	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}$的長度為 6 公分
(2) $\angle AOB=300^\circ$	由(1) 解$\angle AOB$之值
(3) $\overset{\frown}{AB}$長度$=\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}\times2\pi\times\overline{OA}$ $=\dfrac{300^\circ}{360^\circ}\times2\pi\times(6\text{ 公分})$ $=10\pi$ 公分	圓弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓周長 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}$的長度為 6 公分
(4) 所以本題答案選**(C)**	由(3)

9. 圖 9.9 是由四個半徑為 1 的$\frac{1}{4}$圓與六個邊長為 1 的正方形所組成。判斷下列各選項所敘述的圖形，哪一個的面積與圖中灰色區域(4 個$\frac{1}{4}$圓)面積相等？

(A) 以$\overline{BD}$為直徑之圓　　(B) 以$\overline{BC}$為直徑之圓

(C) 以$\overline{AB}$為直徑之圓　　(D) 以$\overline{AC}$為直徑之圓　　(95-1)

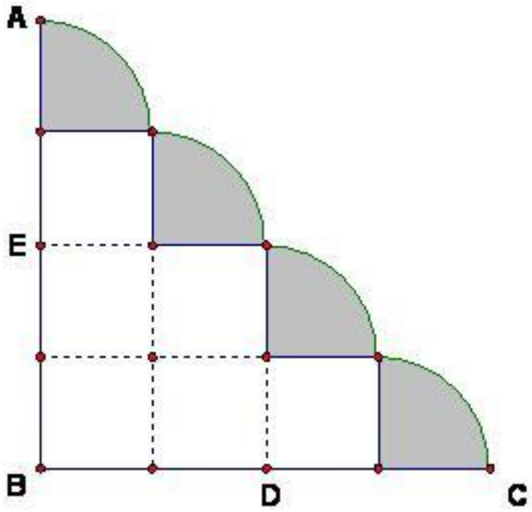


圖 9.9

解答：(A) 以$\overline{BD}$為直徑之圓

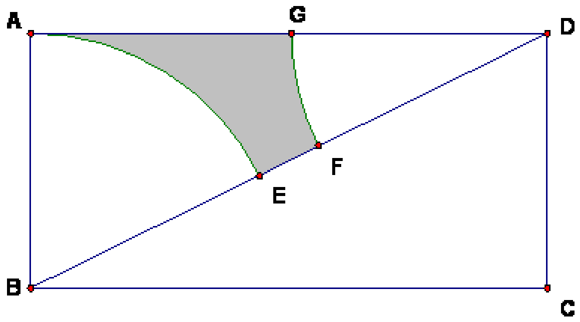
想法： 利用(1)扇形面積定理　　(2)圓面積定理

解：

敘述	理由
(1) 灰色區域為 4 個半徑為 1 的$\frac{1}{4}$圓，合計為 1 個半徑為 1 的圓	1 個$\frac{1}{4}$圓扇形的圓心角為 90°，4 個$\frac{1}{4}$圓扇形的圓心角共 360°，相當於 1 個圓
(2) $\overline{BD}$的長度為 2，所以，以$\overline{BD}$為直徑之圓即為半徑為 1 的圓	圓半徑為圓直徑的一半
(3) 所以本題答案選**(A)**	由(1) & (2)

10. 如圖 9.10，四邊形 ABCD 為長方形，$\overline{BD}$為對角線。今分別以 B、D 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交$\overline{BD}$於 E、F 兩點。若$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5\pi$，則圖 9.10 中灰色區域(AEFG)面積為何？ (95-1)

(A) 4π (B) 5π (C) 8π (D) 10π



解答：(A) 4π

圖 9.10

想法： 利用(1)扇形面積定理 (2)直角三角形面積定理

解：

敘述	理由
(1) $\angle BAD=90°$，△ABD 為直角三角形 $\overline{AB}$為△ABD 的底、$\overline{AD}$為△ABD 的高 且$\overline{AD}=\overline{BC}=5\pi$	已知四邊形 ABCD 為長方形 & 長方形四個內角皆為直角 & 長方形兩組對邊相等 & 已知$\overline{BC}=5\pi$
(2) △ABD 面積 ＝扇形 BAE 面積＋扇形 DFG 面積 ＋灰色區域(AEFG)面積	全量等於分量之和
(3) △ABD 面積$=\frac{1}{2}\times 8\times 5\pi=20\pi$	三角形面積為底與高乘積的一半 & 由(1) $\overline{AB}$為△ABD 的底、$\overline{AD}$為△ABD 的高且$\overline{AD}=5\pi$ & 已知$\overline{AB}=8$
(4) 扇形 BAE 面積＋扇形 DFG 面積 $=\frac{\angle ABE}{360°}\times\pi\times\overline{AB}^2+\frac{\angle FDG}{360°}\times\pi\times\overline{DG}^2$ $=\frac{\angle ABE}{360°}\times\pi\times\overline{AB}^2+\frac{\angle FDG}{360°}\times\pi\times\overline{AB}^2$ $=\frac{\angle ABE+\angle FDG}{360°}\times\pi\times\overline{AB}^2$ $=\frac{90°}{360°}\times\pi\times 8^2$ $=16\pi$	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360°}\times$圓面積 & 已知分別以 B、D 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交$\overline{BD}$於 E、F 兩點。故$\overline{DG}=\overline{AB}$ & (1) $\angle BAD=90°$，△ABD 為直角三角形 ∴ $\angle ABE+\angle FDG=90°$

(5) 灰色區域(AEFG)面積 ＝△ABD 面積－扇形 BAE 面積 －扇形 DFG 面積 ＝△ABD 面積－ (扇形 BAE 面積＋扇形 DFG 面積) $=20\pi-16\pi$ $=4\pi$	由(2) 等量減法公理 & (3) △ABD 面積$=20\pi$ & (4) 扇形 BAE 面積＋扇形 DFG 面積 $=16\pi$
(6) 所以本題答案選**(A)**	由(5)

11. 如圖 9.11，有一圓及長方形 ABCD，其中 A、B、C、D 四點皆在圓上，且 $\overline{BC}<\overline{CD}$。 今分別以$\overline{BC}$、$\overline{CD}$為邊長作甲、乙兩正方形。若圓半徑為 1.5 公分，則甲、乙兩正方形面積和為多少平方公分？ (95-1)

(A) 4.5　(B) 6　(C) 7.5　(D) 9

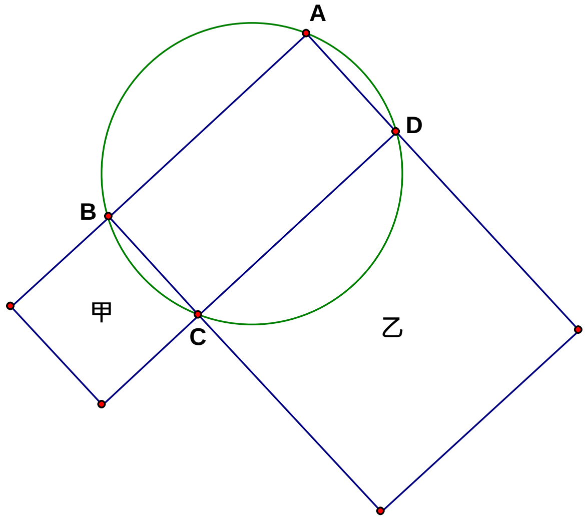


圖 9.11

解答：(D) 甲、乙兩正方形面積和為 9 平方公分。

想法： 利用(1) 圓周角定理 及 (2)畢氏定理。

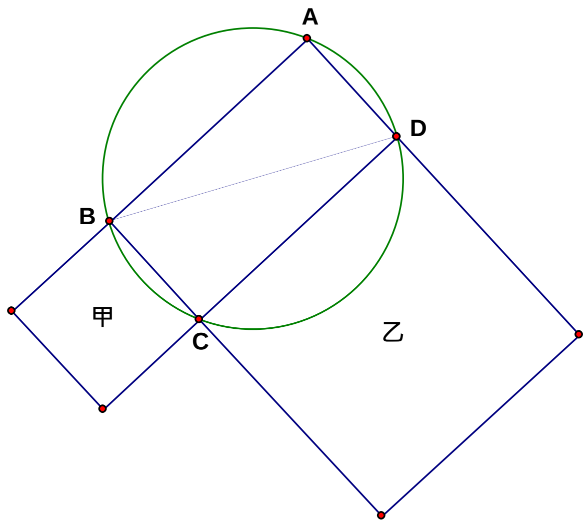


圖 9.11-1

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BD}$	兩點可作一直線
(2) 圓周角∠BCD＝90°	已知 ABCD 為長方形，長方形每個角都是直角

(3) $\overset{\frown}{BAD}$度數＝180°	弧度為所對之圓周角的 2 倍
(4) $\overline{BD}$為圓的直徑	由(3) ＆ 半圓的弧度為 180°，$\overline{BD}$為半圓的兩端點
(5) $\overline{BD}$＝3 公分	由(4) ＆ 已知圓半徑長為 1.5 公分
(6) 甲正方形面積＝$\overline{BC}^2$	已知以$\overline{BC}$為邊長作甲正方形 ＆ 正方形面積為邊長的平方
(7) 乙正方形面積＝$\overline{CD}^2$	已知以$\overline{CD}$為邊長作乙正方形 ＆ 正方形面積為邊長的平方
(8) 直角△BCD 中 $\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2$	由(2) ∠BCD＝90° ＆ 畢氏定理
(9) 甲面積＋乙面積＝(3 公分)^2 ＝9 平方公分	由(5)、(6)、(7) ＆ (8) 代換
(10) 所以本題答案選(D)	由(9)

12. 已知甲、乙、丙、丁為四個全等的六邊形，且緊密地圍著灰色圖形戊。若甲、乙、丙、丁的每一邊長均為 1，則戊面積與甲面積的比值為何？

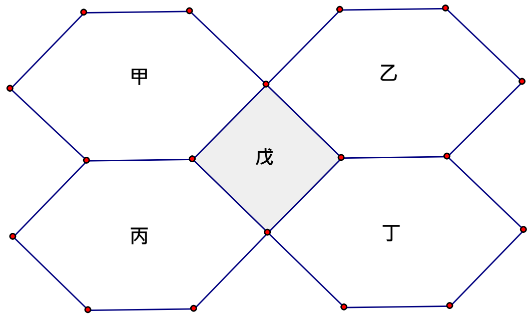


圖 9.12(a)

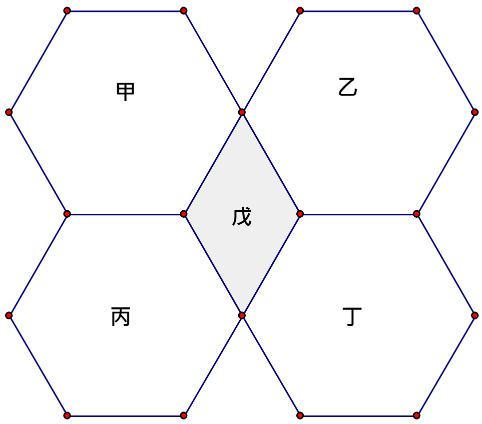


圖 9.12(b)

解答： (D) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ (戊為正方形)　　　(B) $\dfrac{1}{3}$ (戊為菱形)

想法： 戊為邊長都為 1 的四邊形，戊的形狀可能有兩種情形：

1. 圖 9.12(a)中，戊為正方形
2. 圖 9.12(b)中，戊為菱形，甲、乙、丙、丁均為正六邊形

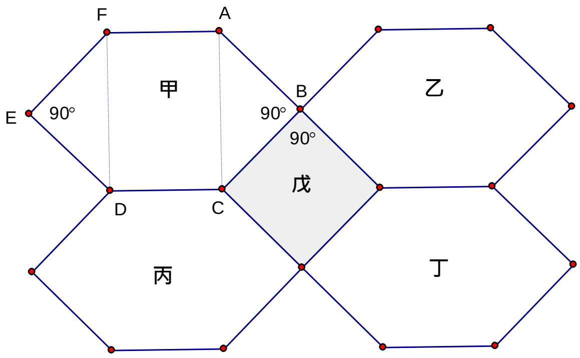


圖 9.12(a)-1

解：圖 9.12(a)中，戊的形狀為正方形

敘述	理由
(1) 戊為邊長都為 1 的正方形， 其面積為$\overline{BC}^2$＝1	正方形面積為邊長的平方 & 已知甲、乙、丙、丁的每一邊長均為 1
(2) 在甲六邊形中連接點 A 與點 C、連接點 D 與點 F，如圖 9.12(a)-1	兩點作一直線
(3) 甲六邊形是二個直角三角形 (△ABC、△DEF)和一個 長方形 ACDF 組成	如圖 9.12(a)-1，全量等全部分量的和
(4) △ABC 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$	三角形面積底與高乘積的一半 & 已知甲的每一邊長均為 1
(5) △DEF 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{ED}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$	三角形面積底與高乘積的一半 & 已知甲的每一邊長均為 1
(6) △DEF 中，$\overline{FD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	畢氏定理 & 已知甲的每一邊長均為 1
(7) 長方形 ACDF 面積 $=\overline{AF}\times\overline{FD}=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$	長方形面積為長與寬之乘積 & 已知甲的每一邊長均為 1 & (6) $\overline{FD}=\sqrt{2}$
(8) 甲面積 ＝△ABC 面積＋△DEF 面積＋ 長方形 ACDF 面積 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$	由(4)、(5) & (7)
(9) 戊面積：甲面積 $=1:(1+\sqrt{2})=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$	比值定義 & 由(1) 戊面積＝1、(8) 甲面積＝$1+\sqrt{2}$
(10) 所以若戊為正方形，則本題答案選(D)	由(9)

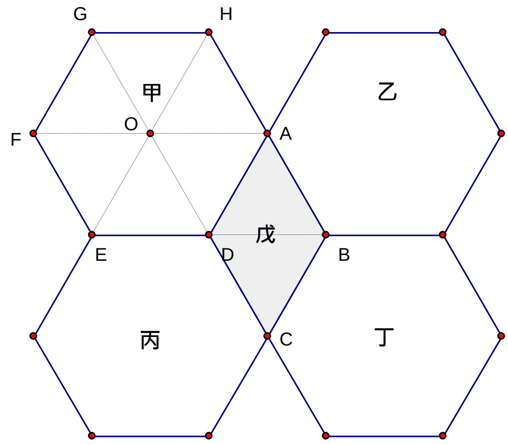


圖 9.12(b)-1

解： 圖 9.12(b)中，戊為菱形，甲、乙、丙、丁均為正六邊形

敘述	理由
(1) 連接戊四邊形的 B 點與 D 點，可將菱形分成 2 個面積相等的三角形，如圖 9.12(b)-1 所示， 則戊面積＝2×△ABD 面積	已知甲、乙、丙、丁的每一邊長均為 1，戊為菱形 & 菱形對角線將此菱形平分為兩個面積相等的三角形
(2) 由甲六邊形中心點 O 連接六個頂點，可將其分成 6 個邊長均為 1 的正三角形，如圖 9.12(b)-1 ，則甲面積＝6×△AOD 面積	正六邊形由 6 個全等的正三角形組成 & 已知甲、乙、丙、丁的每一邊長均為 1
(3) 甲圖形中，∠HAD＝120°	正六邊形每一內角為 120°
(4) ∠HAD＋∠DAB＝180°	平角為 180°
(5) ∠DAB＝180°－∠HAD ＝180°－120°＝60°	由(4) 等量減法公理 & (3) ∠HAD＝120°
(6) △ABD 為等腰三角形	已知甲、乙的每一邊長均為 1
(7) ∠ADB＝∠ABD ＝(180°－∠DAB)÷2 ＝(180°－60°)÷2＝60°	由(6) 等腰三角形底角＝(180°－頂角)÷2 & (5) ∠DAB＝60°
(8) △ABD 為邊長為 1 的正三角形	由(5) & (6) 等角三角形為正三角形 & 已知甲、乙、丙、丁的每一邊長均為 1
(9) △ABD 面積＝△AOD 面積	由(2) & (9) △ABD 與△AOD 皆為邊長為 1 的正三角形

(10) 戊面積：甲面積 $=2\times\triangle ABD$ 面積：$6\times\triangle AOD$ 面積 $=2\times\triangle AOD$ 面積：$6\times\triangle AOD$ 面積 $=1:3$ $=\frac{1}{3}$	由(1) 戊面積$=2\times\triangle ABD$ 面積 、 (2) 甲面積$=6\times\triangle AOD$ 面積 & (9) $\triangle ABD$ 面積$=\triangle AOD$ 面積 倍比定理
(11) 所以若戊為菱形，則本題答案選(B)	由(10)

13. 將 182 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 84 與 98 的兩長方形 ABCD 與 EFGH。若$\overline{AB}=\overline{EF}$，且$\overline{AB}>10$，則$\overline{AB}=$？　**(94-1)**

(A) 12　**(B)** 14　**(C)** 17 **(D)** 21

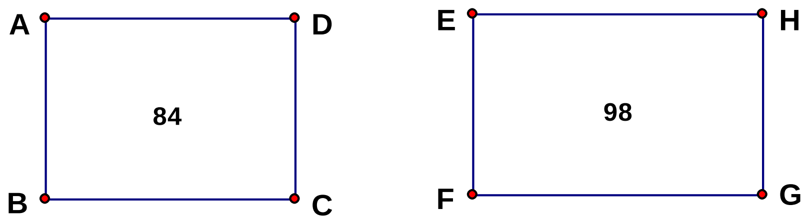


圖 9.13

解答：(B) 14

想法：矩形面積定理

解：

敘述	理由
(1) 長方形 ABCD 面積$=\overline{AB}\times\overline{AD}$	長方形面積為長與寬之乘積
(2) 長方形 EFGH 面積$=\overline{EF}\times\overline{EH}$ $=\overline{AB}\times\overline{EH}$	長方形面積為長與寬之乘積　& 已知$\overline{AB}=\overline{EF}$
(3)　長方形 EFGH 面積－長方形 ABCD 面積 $=\overline{AB}\times\overline{EH}-\overline{AB}\times\overline{AD}$ $=\overline{AB}\times(\overline{EH}-\overline{AD})$	由(1)式－(2)式　&　乘法分配律
(4) $98-84=\overline{AB}\times(\overline{EH}-\overline{AD})$	由(3)　& 已知長方形 EFGH 面積＝98、 長方形 ABCD 面積＝84
(5) $14=\overline{AB}\times(\overline{EH}-\overline{AD})$	由(4)
(6) $\overline{AB}=14$　&　$\overline{EH}-\overline{AD}=1$	因為 14＝14x1；14＝7x2； 14＝2x7；14＝1x14 且$\overline{AB}>10$， 故$\overline{AB}=14$　&　$\overline{EH}-\overline{AD}=1$
(7) 所以本題答案選**(B)**	由(6)

14. 圖 9.14 是測量一物體體積的過程：

步驟一：將 300ml 的水裝進一個容量為 450ml 的杯子中。

步驟二：將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。

步驟三：同樣的玻璃珠再加兩個放入水中，結果水滿溢出。

根據以上過程，推測一顆玻璃珠的體積在下列哪一範圍內？(1ml＝1cm^3)

(94-1)

(A) 30cm^3 以上，50cm^3 以下　　**(B)** 50cm^3 以上，70cm^3 以下

(C) 70cm^3 以上，90cm^3 以下　　**(D)** 90cm^3 以上，110cm^3 以下

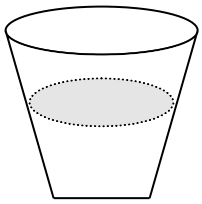


圖 9.14-1

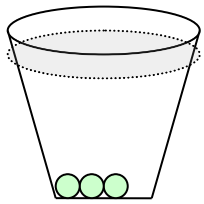


圖 9.14-2

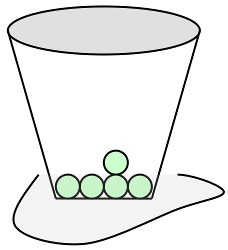


圖 9.14-3

解答：(A) 30cm^3 以上，50cm^3 以下

想法： (1) 體積 (2)容量

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.14-1： 未裝水的容量＝450 ml－300 ml ＝150 ml＝150 cm^3	步驟一：將 300ml 的水裝進一個容量為 450ml 的杯子中
(2) 假設一顆玻璃珠的體積＝x cm^3	假設
(3) 如圖 9.14-2： $3\boldsymbol{x} < 150$ $\boldsymbol{x} < 50$	步驟二：將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿 & 等量除法公理
(4) 如圖 9.14-3： $5\boldsymbol{x} > 150$ $\boldsymbol{x} > 30$	步驟三：同樣的玻璃珠再加兩個放入水中，結果水滿溢出 & 等量除法公理
(5) $30 < \boldsymbol{x} < 50$	由(3) & (4) 求交集
(6) 所以本題答案選**(A)**	由(5)

15. 圖 9.15 中三個四邊形 BCJK、CDHI、DEFG 均為矩形，且 A、B、C、D、E 五點在同一直線上。已知 I、G 兩點分別在$\overline{CJ}$與$\overline{DH}$上，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若△ABK 的面積為 a，△EFG、△GHI、△IJK 的面積和為 b，則 a：b＝？
(A) 1：1　**(B)** 1：2　**(C)** 1：3　**(D)** 2：3　**(94-1)**

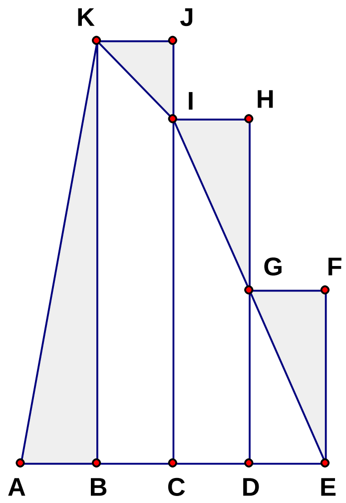


圖 9.15

解答：(A) 1：1
想法： 三角形面積定理
解：

敘述	理由
(1) △ABK 面積＝a＝$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BK}$	三角形面積定理 & 已知△ABK 的面積為 a
(2) △EFG 面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{GF}\times\overline{EF}$ $=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{EF}$	三角形面積定理 & 已知四邊形 DEFG 為矩形、矩形對邊等長($\overline{GF}=\overline{DE}$)
(3) △GHI 面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{HI}\times\overline{GH}$ $=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{GH}$	三角形面積定理 & 已知四邊形 CDHI 為矩形、矩形對邊等長($\overline{HI}=\overline{CD}$)
(4) △IJK 面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{JK}\times\overline{IJ}$ $=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{IJ}$	三角形面積定理 & 已知四邊形 BCJK 為矩形、矩形對邊等長($\overline{JK}=\overline{BC}$)

(5) b ＝△EFG＋△GHI＋△IJK 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{EF}+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{GH}+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{IJ}$	已知△EFG、△GHI、△IJK 面積和為 b ＆ (2)、(3)、(4)
$=\frac{1}{2}\times(\overline{DE}\times\overline{EF}+\overline{CD}\times\overline{GH}+\overline{BC}\times\overline{IJ})$	提出$\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}\times\overline{EF}+\overline{AB}\times\overline{GH}+\overline{AB}\times\overline{IJ})$	已知$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ})$	提出$\overline{AB}$
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BK}$	全量等於分量之和 $\overline{BK}=\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}$
(6) a：b$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BK}$：$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BK}=1$：1	由(1) ＆ (5) 倍比定理
(7) 所以本題答案選**(A)**	由(6)

16. 如圖 9.16，四邊形 ABCD 為一平行四邊形，P 在$\overrightarrow{CD}$上，且$\overline{PD}=2\overline{DC}$。甲、乙兩人想通過 P 點作一直線，將平行四邊形分成兩個等面積的區域，其作法如下：

甲：取$\overline{AD}$中點 E，作$\overrightarrow{PE}$，即為所求。

乙：連接$\overline{BD}$、$\overline{AC}$交於 O，作$\overrightarrow{PO}$，即為所求。

對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？ **(94-1)**

(A) 甲、乙皆正確　　**(B)** 甲、乙皆錯誤

(C) 甲正確，乙錯誤　　**(D)** 甲錯誤，乙正確

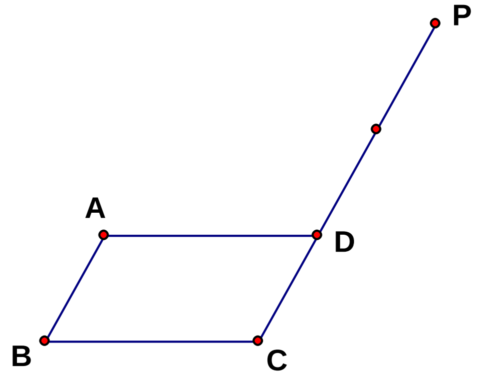


圖 9.16

解答：(D) 甲錯誤，乙正確

想法：

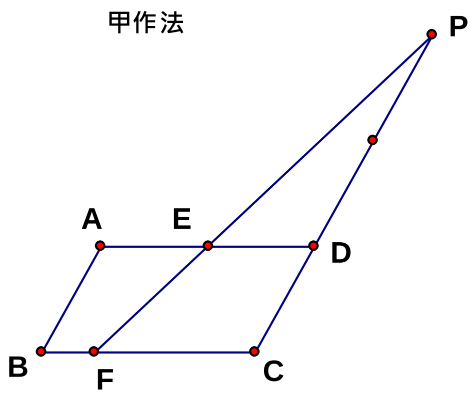


圖 9.16-1

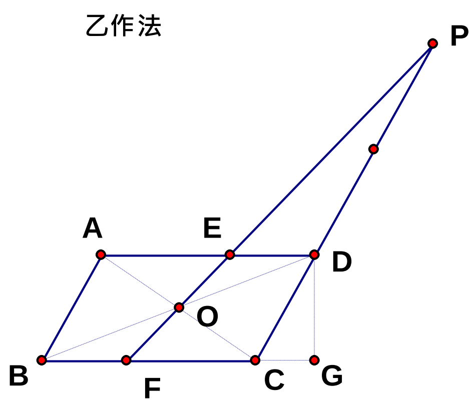


圖 9.16-2

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.16-1，甲錯誤	無法證明四邊形 ABFE 面積＝四邊形 CDEF 面積

(2) 如圖 9.16-2，乙正確	$\overline{AE}=\overline{CF}$ (∵△OAE ≅ △OCF　A.S.A.全等定理) $\overline{BF}=\overline{DE}$ (∵△OBF ≅ △ODE　A.S.A.全等定理) 梯形 ABFE 面積$=\frac{1}{2}\times(\overline{BF}+\overline{AE})\times\overline{DG}$ 梯形 CDEF 面積$=\frac{1}{2}\times(\overline{DE}+\overline{CF})\times\overline{DG}$ $=\frac{1}{2}\times(\overline{AE}+\overline{BF})\times\overline{DG}$ 所以梯形 ABFE 面積＝梯形 CDEF 面積
(3) 所以本題選**(D)**	由(1) ＆ (2)

17. 如圖 9.17，AIB、BJC、DLE、EKF、AGD、BGE、BHE、CHF 皆為直徑為 2 的半圓。求灰色部分面積為何？ **(94-1)**

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 2π **(D)** 4π

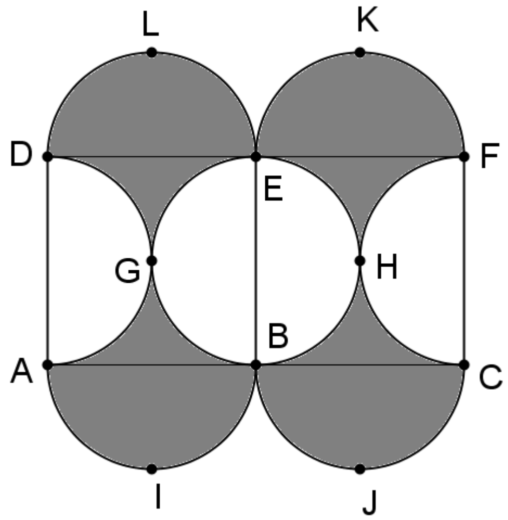


圖 9.17

解答：(B) 8

想法： 直徑相同之圓面積相等

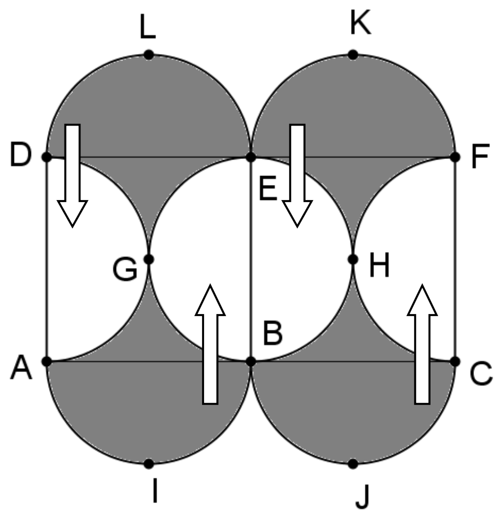


圖 9.17-1

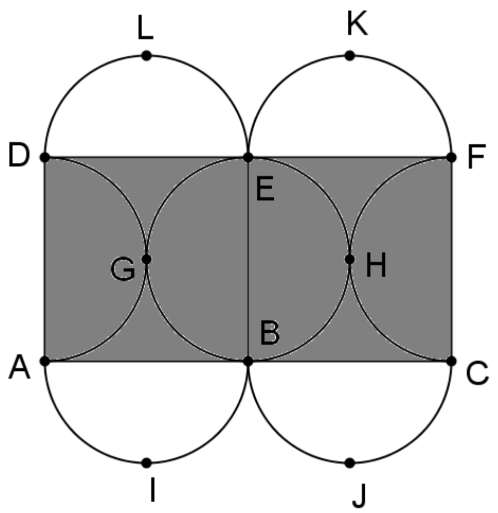


圖 9.17-2

解：

敘述	理由
(1) 半圓 DLE 面積＝半圓 AGD 面積 半圓 AIB 面積＝半圓 BGE 面積 半圓 EKF 面積＝半圓 EHB 面積 半圓 BJC 面積＝半圓 CHF 面積	已知 AIB、BJC、DLE、EKF、AGD、BGE、BHE、CHF 皆為直徑為 2 的半圓 & 相同直徑之半圓面積相等

(2) 如圖 9.17-1， 將半圓 DLE 移到半圓 AGD 位置 將半圓 AIB 移到半圓 BGE 位置 將半圓 EKF 移到半圓 EHB 位置 將半圓 BJC 移到半圓 CHF 位置	由(1) ＆ 移形公理
(3) 如圖 9.17-2， 灰色部份為兩個邊長為 2 的正方形	由(2)
(4) 灰色部分面積＝$2\times(2\times2)$＝8 平方單位	由(3) ＆ 正方形面積為邊長平方
(5) 所以本題答案選**(B)**	由(4)

18. 如圖 9.18，將長方形分成六塊大小相同的正方形，則灰色區域面積與原長方形面積的比值為何？ **(93-1)**

(A) $\frac{4}{6}$ **(B)** $\frac{4}{7}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{7}{12}$

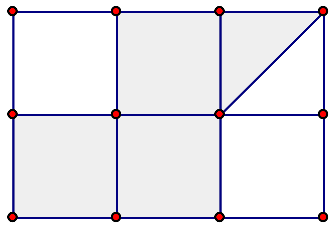


圖 9.18

解答： **(D)** $\frac{7}{12}$

想法： 全等形

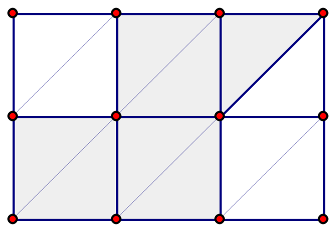


圖 9.18-1

解：

敘述	理由
(1) 將每一正方形作一對角線，可將六塊大小相同的正方形分成 12 塊大小相同的三角形，如圖 9.18-1，則灰色區域為 7 塊三角形，原長方形為 12 塊三角形	已知將長方形分成六塊大小相同的正方形 & 正方形對角線將此正方形平分成兩個面積相等的三角形
(2) 灰色區域面積：原長方形面積 ＝7 塊三角形面積：12 塊三角形面積	由(1)
＝7：12	倍比定理
＝$\frac{7}{12}$	比值定義

19. 有一個體積為 512 立方公分的正方體，求此正方體的表面積為多少平方公分？**(93-1)**

(A) 144 **(B)** 192 **(C)** 256 **(D)** 384 平方公分

解答：(D) 384

想法：（1）利用正方體體積為逼長的立方求出正方體邊長

（2）邊長為 a 的正方體表面積＝$6a^2$

解：

敘述	理由
(1) (正立方體邊長)^3＝512 立方公分	正方體體積＝(邊長)^3 & 已知正立方體體積為 512 立方公分
(2) 正立方體邊長＝$\sqrt[3]{512\text{立方公分}}$＝8 公分	由(1) 求立方根
(3) 正方體表面積＝6×(8 公分)^2 ＝6×(64 平方公分) ＝384 平方公分	邊長為 a 的正方體表面積＝$6a^2$ & (2) 正立方體邊長＝8 公分
(4) 所以本題答案選**(D)**	由(3)

20. 如圖 9.19，將長為 50 公分、寬為 2 公分的矩形，折成圖 9.20-1 的圖形並塗上灰色，則灰色部分的面積為多少平方公分？ **(92-1)**

(A) 94　**(B)** 96　**(C)** 98　**(D)** 100 平方公分

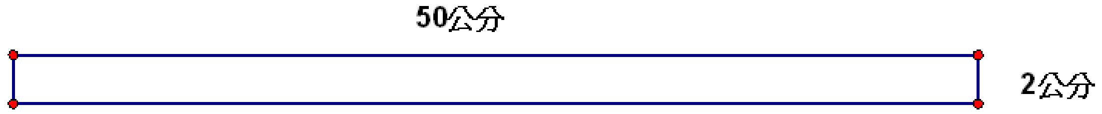


圖 9.19

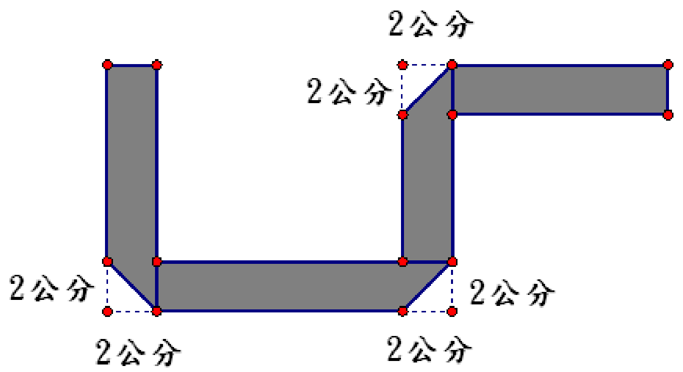


圖 9.19-1

解答：(A) 94

想法：灰色部分的面積＝原矩形面積－3×(底高都是 2 公分的直角三角形面積)

解：

敘述	理由
(1) 灰色部分的面積 ＝原矩形面積－3×(底高都是 2 公分的直角三角形面積)	已知原矩形的寬為 2 公分 & 折成圖 9.19-1 後，灰色部分面積比原矩形面積減少了 3 個虛線三角形部分的面積，而此 3 個三角形的底和高與原矩形的寬等長
(2) 原矩形面積＝(2 公分)×(50 公分) ＝100 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & 已知原矩形的長為 50 公分，寬為 2 公分
(3) 三角形面積＝$\frac{1}{2}$×(2 公分)×(2 公分) ＝2 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 & 由(1) 此 3 個三角形的底和高都為 2 公分
(4) 灰色部分的面積 ＝100 平方公分－3×(2 平方公分) ＝94 平方公分	由(1)、(2) & (3)
(5) 所以本題答案選**(A)**	由(4)

21. 如圖 9.20，△ABC 中，∠ABC＝90°，O 為△ABC 的外心，∠C＝60°，$\overline{BC}$＝2。若△AOB 面積＝a，△OBC 面積＝b，則下列敘述何者正確？ **(92-1)**

(A) a.> b　　**(B)** a < b　　**(C)** a＝b　　**(D)** a＋b＝4

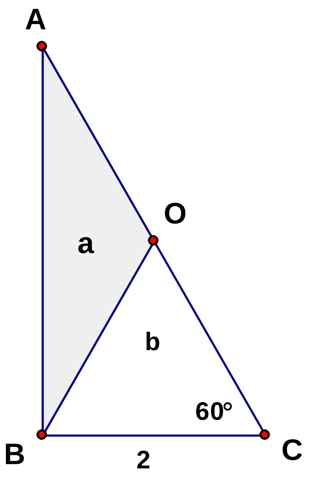


圖 9.20

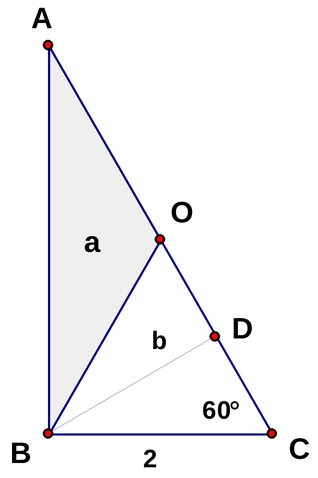


圖 9.20-1

解答：(C) a＝b

想法： (1) 直角三角形外心為斜邊中點

(2) 等高之三角形面積比為底邊之比(詳見例題 9.1-43)

解：

敘述	理由
(1) O 點為$\overline{AC}$之中點，$\overline{AO}=\overline{CO}$	已知△ABC 中，∠ABC＝90°，O 為△ABC 的外心 & 直角三角形外心為斜邊中點
(2) 過 B 點作$\overline{BD}\perp\overline{AC}$交$\overline{AC}$於 D 點，則$\overline{BD}$同時為△AOB 與△OBC 的高，如圖 9.20-1	作圖
(3) △AOB 面積：△OBC 面積＝$\overline{AO}:\overline{CO}$	由(2) $\overline{BD}$同時為△AOB 與△OBC 的高 & 等高之三角形面積比為底邊之比
(4) a：b＝1：1	由(3) & 已知△AOB 面積＝a，△OBC 面積＝b & (1) $\overline{AO}=\overline{CO}$
(5) a＝b	由(4) 外項乘積等於內項乘積
(6) 所以本題答案選**(C)**	由(5)

22. 阿俊拼裝完成了直角柱形的燈架，如圖 9.21 所示。他共用了 9 支鋼管，其中 30 公分長的有 4 支，40 公分長的有 3 支，50 公分長的有 2 支。請問此燈架的三角形底面三邊長分別為多少？　**(91-1)**

(A) 30 公分、30 公分、50 公分　**(B)** 30 公分、30 公分、40 公分

(C) 30 公分、40 公分、50 公分　**(D)** 40 公分、40 公分、50 公分

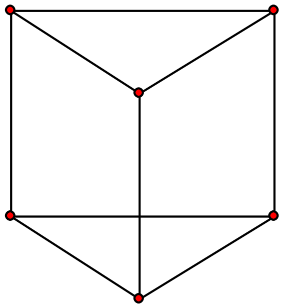


圖 9.21

解答： **(A)** 30 公分、30 公分、50 公分

想法： 三角柱的性質

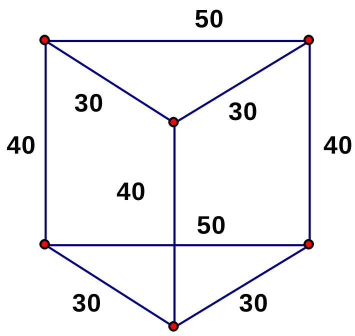


圖 9.21-1

解：

敘述	理由
(1) 40 公分長的有 3 支為三角柱的三個高、50 公分長的有 2 支為上底面與下底面三角形的斜邊、30 公分長的有 4 支為上底面與下底面三角形的其他兩邊，此燈架的三角形底面三邊長分別為 30 公分、30 公分、50 公分，如圖 9.21-1 所示	三角柱的三個高等長，所以有可能為 30 公分或 40 公分，但如果高是 30 公分，則剩下一根 30 公分鋼管將無用處，因此三角柱的高為 40 公分的鋼管，底面三角形邊長則為 30 公分與 50 公分鋼管的組合
(2) 所以本題答案選**(A)**	由(1)

23. 如圖 9.22，ABCD 為一矩形，過 D 作直線 L 與$\overline{AC}$平行後，再分別自 A、C 作直線與 L 垂直，垂足為 E、F。若圖中兩塊灰色部分的面積和為 a，△ABC 的面積為 b，則 a：b＝？ **(91-1)**

(A) 1：1　**(B)** 1：$\sqrt{2}$　**(C)** 1：$\sqrt{3}$　**(D)** 1：2

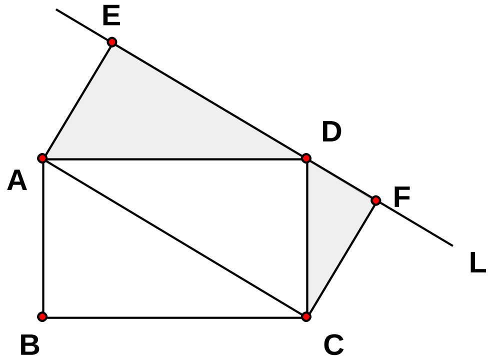


圖 9.22

解答：(A) 1：1

想法： (1) 利用平行四邊形對角線將此平行四邊形平分為兩個面積相等的三角形，可得△ABC 面積等於△ACD 面積

(2) 若能證明四邊形 ACFE 為平行四邊形，則可利用例題 9.1-36 結論：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半。可得△ACD 面積為△ADE 與△CDF 的面積之和(即灰色部分面積＝△ACD 面積)

(3) 所以灰色部分面積＝△ACD 面積＝△ABC 面積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 中， △ABC 面積＝△ACD 面積	已知 ABCD 為一矩形 & 矩形的對角線平分矩形為兩個面積相等的三角形
(2) 四邊形 ACFE 中， $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$	已知過 D 作直線 L 與$\overline{AC}$平行 & 已知分別自 A、C 作直線與 L 垂直，垂足為 E、F。(同時垂直於一直線之兩直線互相平行)
(3) 四邊形 ACFE 為平行四邊形	由(2) 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) 平行四邊形 ACFE 中， △ADE 面積＋△CDF 面積 ＝△ACD 面積為	例題 9.1-36 結論：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半

(5) △ADE 面積＋△CDF 面積 ＝△ABC 面積	由(1) & (4) 遞移律
(6) a＝b	由(5) & 已知兩塊灰色部分的面積和為 a，△ABC 的面積為 b
(7) a：b＝1：1	由(6) & 比的定義
(8) 所以本題答案選**(A)**	由(7)

24. 如圖 9.23，<u>美美景觀設計公司</u>設計一長方形庭園，其中長方形庭園長 16 公尺，寬 12 公尺，在其內部規劃 S 區(△EFG 為等腰直角三角形，其中 G 點為$\overline{CD}$中點)為觀賞休憩區，T 區(長方形 IJKL)為人行步道區，使得剩餘的花草區(灰色部分)的面積為 141 平方公尺，試問 T 區的寬度($\overline{IJ}$)是多少公尺？

(A) 1　　**(B)** 1.5　　**(C)** 2　　**(D)** 2.5 公尺　　**(90-1)**

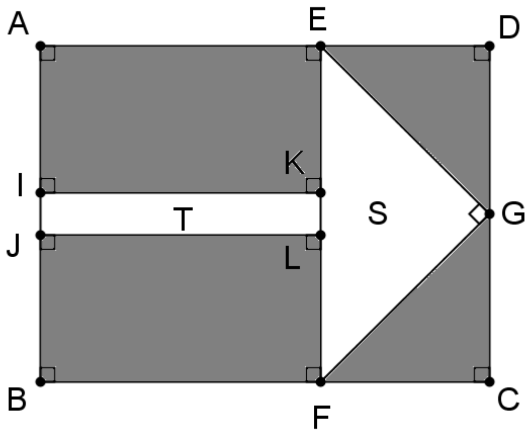


圖 9.23

解答：(B) 1.5

想法： 長方形庭園面積＝灰色部分面積＋長方形 IJKL 面積＋△EFG 面積

解：

敘述	理由
(1) 長方形庭園面積＝灰色部分面積＋長方形 IJKL 面積＋△EFG 面積	如圖 9.23 全量等於分量之和
(2) 長方形庭園面積＝(16 公尺)×(12 公尺)＝192 平方公尺	長方形面積為長與寬之乘積 & 已知長方形庭園長 16 公尺，寬 12 公尺
(3) △EFG 面積＝$\dfrac{\overline{EG}\times\overline{FG}}{2}=\dfrac{\overline{EG}^2}{2}$	三角形面積為底與高乘積的一半 & 已知△EFG 為等腰直角三角形
(4) 長方形 IJKL 面積＝$\overline{IK}\times\overline{IJ}$	長方形面積為長與寬之乘積
(5) 長方形庭園中，$\overline{EF}=\overline{AB}=12$ 公尺 & $\overline{DG}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=6$ 公尺	長方形庭園寬 12 公尺 & G 點為$\overline{CD}$中點
(6) △EFG 中，$\overline{EG}:\overline{EF}=1:\sqrt{2}$	已知△EFG 為等腰直角三角形 & 等腰直角三角形股與斜邊之比為 $1:\sqrt{2}$
(7) $\sqrt{2}\times\overline{EG}=\overline{EF}$	由(6) 外項乘積等於內項乘積

(8) $\overline{EG}=\dfrac{\overline{EF}}{\sqrt{2}}=\dfrac{12\text{公尺}}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ 公尺	由(7) 等量除法公理 & (5) $\overline{EF}=12$ 公尺
(9) △EFG 面積$=\dfrac{\overline{EG}^2}{2}$ $=\dfrac{(6\sqrt{2}\text{公尺})^2}{2}$ ＝36 平方公尺	由(3) & (8) $\overline{EG}=6\sqrt{2}$ 公尺
(10) △DEG 中，$\overline{DE}^2+\overline{DG}^2=\overline{EG}^2$	畢氏定理
(11) $\overline{DE}^2=\overline{EG}^2-\overline{DG}^2$ $=(6\sqrt{2}$ 公尺$)^2-(6$ 公尺$)^2$ ＝36 平方公尺	由(10) 等量減法公理 & (8) $\overline{EG}=6\sqrt{2}$ 公尺、(5) $\overline{DG}=6$ 公尺
(12) $\overline{DE}=6$ 公尺 或 $\overline{DE}=-6$ 公尺	由(11) 求平方根
(13) 所以$\overline{DE}=6$ 公尺	由(12) & $\overline{DE}$為線段長度必大於 0
(14) 長方形庭園中，$\overline{AE}+\overline{ED}=\overline{AD}$	全量等於分量之和
(15) $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}$ ＝16 公尺－6 公尺＝10 公尺	由(14) 等量減法公理 & 已知長方形庭園長 16 公尺&(13) $\overline{DE}=6$ 公尺
(16) 矩形 AIKE 中，$\overline{IK}=\overline{AE}=10$ 公尺	矩形對邊等長 &(15) $\overline{AE}=10$ 公尺
(17) 長方形 IJKL 面積$=\overline{IK}\times\overline{IJ}$ $=(10$ 公尺$)\times\overline{IJ}$	由(4) & (16) $\overline{IK}=10$ 公尺
(18) 192 平方公尺 ＝141 平方公尺＋(10 公尺)$\times\overline{IJ}$ ＋36 平方公尺	由(1) & (2)長方形庭園面積＝192 平方公尺、 已知灰色部分面積為 141 平方公尺、 (17)長方形 IJKL 面積＝(10 公尺)$\times\overline{IJ}$ (9) △EFG 面積＝36 平方公尺
(19) (10 公尺)$\times\overline{IJ}$ ＝192 平方公尺－141 平方公尺－36 平方公尺 ＝15 平方公尺	由(18) 等量減法公理
(20) $\overline{IJ}$＝(15 平方公尺)÷(10 公尺) ＝1.5 公尺	由(19) 等量除法公理

25. 圖 9.24 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩條直徑，若∠ACD＝2∠AOC，且圓 O 的半徑為 30 公分，則∠BOC 對的弧長是多少公分？ **(90-1)**

(A) 10π　**(B)** 12π　**(C)** 20π　**(D)** 24π 公分

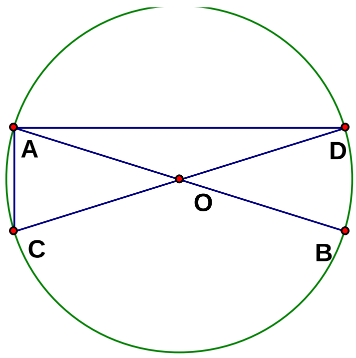


圖 9.24

解答：(D) 24π

想法：(1) 圓周角所對的弧度為此圓周角的 2 倍

(2) 圓心角的度數等於所對的弧度數

解：

敘述	理由
(1) 假設∠AOC＝x°，則∠ACD＝2x°	假設 & 已知∠ACD＝2∠AOC
(2) $\overset{\frown}{AC}$的度數＝∠AOC＝x° $\overset{\frown}{AD}$的度數＝2∠ACD＝4x°	由(1)&圓心角的度數等於所對的弧度數 & 圓周角所對的弧度為此圓周角的 2 倍
(3) $\overset{\frown}{AC}$的度數＋$\overset{\frown}{AD}$的度數＝180°	已知$\overline{CD}$為圓 O 直徑
(4) x°＋4x°＝180°	由(2) & (4) 代換
(5) x＝36	由(4) 解一元一次方程式
(6) ∠AOD＝$\overset{\frown}{AD}$的度數＝4x°＝144°	圓心角的度數等於所對的弧度數 & (2) $\overset{\frown}{AD}$的度數＝4x° & (5) x＝36
(7) ∠BOC＝∠AOD＝144°	對頂角相等 & (6) ∠AOD＝144°
(8) $\overset{\frown}{BD}$的弧長＝$\frac{\angle BOC}{360^\circ}$×2×π×圓半徑 ＝$\frac{144^\circ}{360^\circ}$×2×π×(30 公分) ＝24π 公分	弧長＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓周長 & (7) 圓心角∠BOC＝144°、 已知圓 O 的半徑為 30 公分

26. 如圖 9.25，$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，$\overline{BC}$是過 B 點之切線，D 在$\overline{AB}$上。
求作：在$\overline{BC}$上取 P 點，使得$\overline{AP}$平分△ABC 面積。

下列有四圈尺規作圖的方法，何者<u>錯誤</u>？ **(90-1)**

(A) 取$\overline{BC}$的中點 P，連接$\overline{AP}$

(B) 作∠A 之角平分線交$\overline{AP}$於 P 點

(C) 作$\overline{BD}$的中垂線交$\overline{BC}$於 P 點，連接$\overline{AP}$

(D) 過 O 點作直線平行$\overline{AC}$交$\overline{BC}$於 P 點，連接$\overline{AP}$

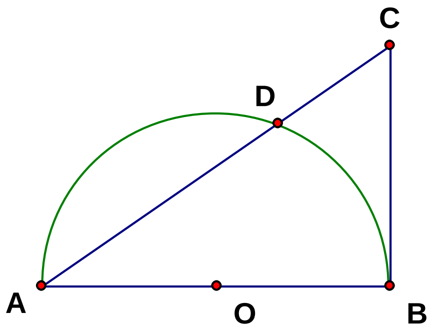


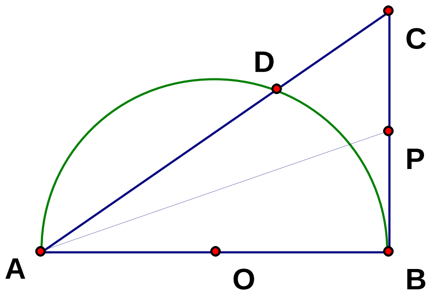
圖 9.25

解答： **(B)** 作∠A 之角平分線交$\overline{AP}$於 P 點

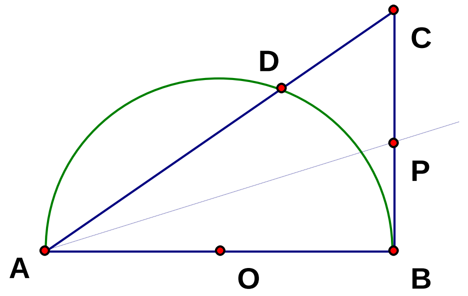
想法： (1) 若$\overline{AP}$平分△ABC 面積，則△ABP 面積：△ACP 面積＝1：1

(2) 等高之三角形面積比為底邊長之比，因此$\overline{BP}$：$\overline{CP}$＝1：1，故 P 點為$\overline{BC}$之中點

解：

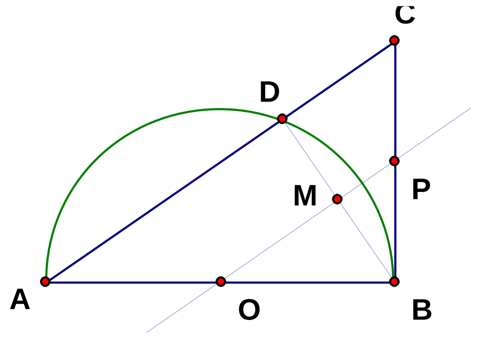
敘述	理由
(1) (A) 正確 	△ABP 面積：△ACP 面積＝$\overline{BP}$：$\overline{CP}$， P 為$\overline{BC}$的中點，$\overline{BP}$：$\overline{CP}$＝1：1 ， 則△ABP 面積：△ACP 面積＝1：1， $\overline{AP}$平分△ABC 面積

(2) (B) 錯誤



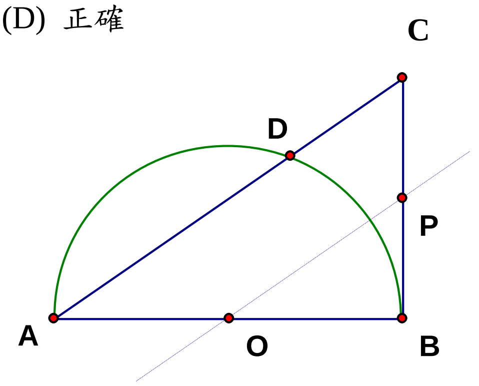
△ABP 面積：△ACP 面積＝$\overline{BP}$：$\overline{CP}$，
$\overline{AP}$為∠A 之角平分線，
根據定理 8.1-14：三角形內分比定理，
$\overline{BP}$：$\overline{CP}$＝$\overline{AB}$：$\overline{AC}$≠1：1，
△ABP 面積：△ACP 面積≠1：1

(3) (C) 正確



△ABP 面積：△ACP 面積＝$\overline{BP}$：$\overline{CP}$，
∠ADB＝90° (直徑$\overline{AB}$所對的圓周角為直角)，則∠CDB＝90°，△CDB 為直角三角形。作$\overline{BD}$的中垂線交$\overline{BC}$於 P 點，則 P 點為△CDB 外心(直角三角形的外心為斜邊中點)，所以 P 為$\overline{BC}$的中點，
$\overline{BP}$：$\overline{CP}$＝1：1 ，
則△ABP 面積：△ACP 面積＝1：1，
$\overline{AP}$平分△ABC 面積

(4) (D) 正確



△ABP 面積：△ACP 面積＝$\overline{BP}$：$\overline{CP}$，
O 點為$\overline{AB}$中點(已知$\overline{AB}$是圓 O 的直徑)，過 O 點作直線平行$\overline{AC}$交$\overline{BC}$於 P 點，則 P 點為$\overline{BC}$中點，$\overline{BP}$：$\overline{CP}$＝1：1，
則△ABP 面積：△ACP 面積＝1：1，
$\overline{AP}$平分△ABC 面積

(5) 所以本題答案選**(B)**

由(2)

27. 如圖 9.26，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$ **(90-1)**

步驟一：將$\overline{AB}$向$\overline{AC}$方向摺過去，使$\overline{AB}$與$\overline{AC}$重合，出現摺線$\overline{AD}$，如圖 9.26-1。

步驟二：將$\overline{CD}$向$\overline{AC}$方向摺過去，如圖 9.26-2，使得$\overline{CD}$完全疊合在$\overline{AC}$上，出現摺線$\overline{CE}$，如圖 9.26-3。

則△AEC 的面積為何？

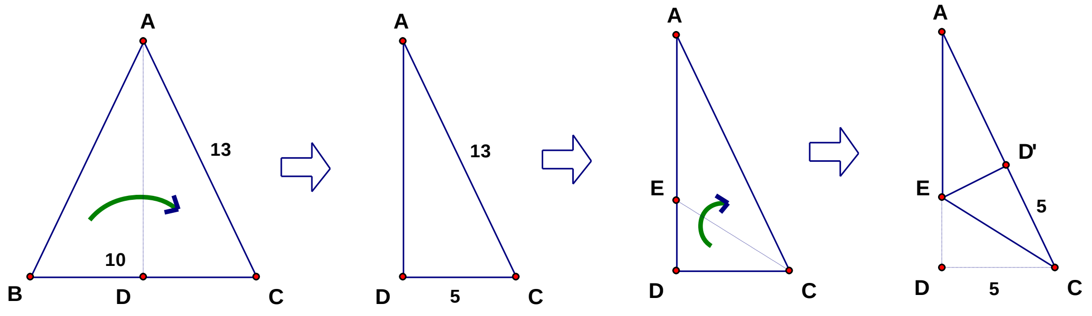


圖 9.26 **圖 9.26-1** **圖 9.26-2** **圖 9.26-3**

(A) 15 **(B)** $\dfrac{65}{4}$ **(C)** 20 **(D)** $\dfrac{65}{3}$

解答：(D) $\dfrac{65}{3}$

想法： (1) 利用對摺後圖形對稱的性質求出$\overline{ED'}$之值

(2) 三角形面積為底與高乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 圖 9.26 中，△ACD ≅ △ABD	由步驟一：對摺後圖形對稱
$\overline{CD}=\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times10=5$	$\overline{CD}=\overline{BD}$ & 已知$\overline{BC}=10$
∠CDA＝∠BDA＝90°	∠CDA＝∠BDA & ∠CDA＋∠BDA＝180°
(2) 如圖 9.26-1 所示，直角△ADC 中，	由(1) ∠CDA＝90° &
$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2$	畢氏定理
$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$	等量減法公理
$=13^2-5^2$	已知$\overline{AC}=13$ & (1) $\overline{CD}=5$
$=144$	
$\overline{AD}=12$	求平方根 & $\overline{AD}$為線段長度必大於 0
(3) 圖 9.26-3 中，△CD'E ≅ △CDE，	由步驟二：對摺後圖形對稱
$\overline{CD'}=\overline{CD}=5$	對應邊相等 & (1) $\overline{CD}=5$
$\overline{ED'}=\overline{ED}$	對應邊相等
∠CD'E＝∠CDE＝90°	對應角相等 & (1) ∠CDA＝90°

(4) 圖 9.26-3 中， $\overline{AD'}+\overline{CD'}=\overline{AC}$ $\overline{AD'}=\overline{AC}-\overline{CD'}$ $=13-5$ $=8$	全量等於分量之和 等量減法公理 已知$\overline{AC}=13$ & (3) $\overline{CD'}=5$
(5) 圖 9.26-3 中， $\overline{AE}+\overline{ED}=\overline{AD}$ $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}$ $=12-\overline{ED'}$	全量等於分量之和 等量減法公理 由(2) $\overline{AD}=12$
(6) 如圖 9.26-3 所示，直角△AD'E 中， $\overline{AD'}^2+\overline{ED'}^2=\overline{AE}^2$ $8^2+\overline{ED'}^2=(12-\overline{ED'})^2$ $\overline{ED'}=\frac{10}{3}$	由(3) ∠CD'E＝90° & 畢氏定理 由(4) $\overline{AD'}=8$ & (5) $\overline{AE}=12-\overline{ED'}$ 求$\overline{ED'}$
(7) △AEC 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{ED'}$ $=\frac{1}{2}\times 13\times\frac{10}{3}$ $=\frac{65}{3}$	三角形面積為底與高乘積之一半 已知$\overline{AC}=13$ & (6) $\overline{ED'}=\frac{10}{3}$
(8) 所以本題答案選**(D)**	由(7)

28. 如圖 9.27，圓上有 A、B、C、D 四點，其中$\angle BAD=80^\circ$。若$\overset{\frown}{ABC}$、$\overset{\frown}{ADC}$的長度分別為 7π、11π，則$\overset{\frown}{BAD}$的長度為何？ (98-1)

(A) 4π　(B) 8π　(C) 10π　(D) 15π

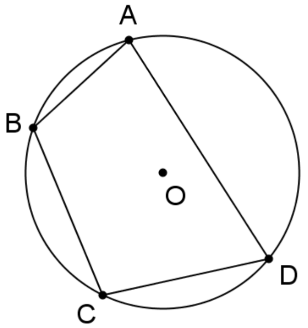


圖 9.27

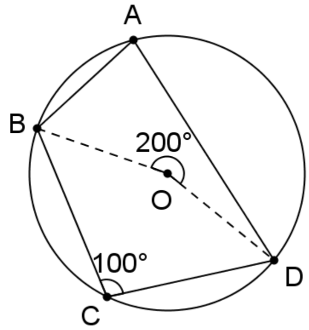


圖 9.27-1

解答：(C) 10π

想法：(1) 先利用$\overset{\frown}{ABC}$與$\overset{\frown}{ADC}$的長度求出圓周長度

(2) 利用圓內接四邊形對角互補的性質求出$\angle BCD$

(3) 利用同弧所對之圓心角為圓周角的 2 倍，求出$\angle BOD$

(4) 最後利用弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓周長，求出$\overset{\frown}{BAD}$的長度

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BO}$、$\overline{DO}$，如圖 9.27-1 所示	兩點決定一直線
(2) 圓 O 周長$=\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{ADC}$ $=7\pi+11\pi=18\pi$	全量等於分量之和 & 已知$\overset{\frown}{ABC}$、$\overset{\frown}{ADC}$的長度分別為 7π、11π
(3) $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$	圓內接四邊形對角互補
(4) $\angle BCD=180^\circ-\angle BAD$ $=180^\circ-80^\circ=100^\circ$	由(3) 等量減法公理 & 已知$\angle BAD=80^\circ$
(5) 優角$\angle BOD=2\angle BCD=2\times100^\circ=200^\circ$	同弧所對之圓心角為圓周角的 2 倍 & (4) $\angle BCD=100^\circ$
(6) $\overset{\frown}{BAD}$的長度$=\dfrac{200^\circ}{360^\circ}\times18\pi=10\pi$	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓周長 & (5) 優角$\angle BOD=200^\circ$、 (2) 圓 O 周長$=18\pi$