習題 7.1

習題 7.1-1

圓與圓周如何區別？

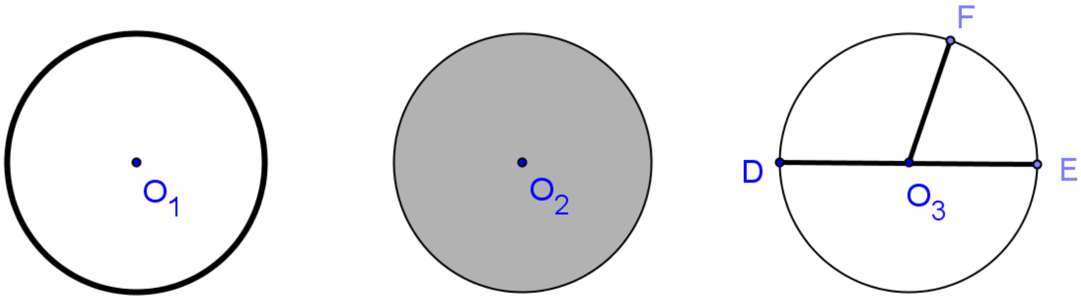
解：圓周為一封閉曲線，線上各點都與圓心等距離，如下圖 7.1-6 (a)；
圓周內的部份為圓，如下圖 7.1-6 (b)。

習題 7.1-2

一個圓有多少條半徑？多少條直徑？

解：(1) 圓周上任何一點與圓心的距離就是此圓的半徑，如下圖 7.1-6 (c)，因此一個圓有無限多條半徑；

(2) 通過圓心而兩端點在圓周上的線段為此圓的直徑，如下圖 7.1-6 (c)，因此一個圓有無限多條直徑。



(a) 圓周　　(b) 圓　　(c) 直徑$\overline{DE}$，半徑$\overline{O_3F}$

圖 7.1-6

習題 7.1-3

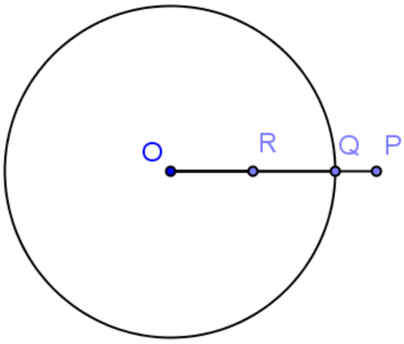
若圓 O 的半徑為 8 公分，根據下列判斷 P 點、Q 點、R 點與圓 O 的位置關係：

(1) $\overline{OP}$＝10 公分　　(2) $\overline{OQ}$＝8 公分　　(3) $\overline{OR}$＝4 公分

想法：(1) 圓外一點到圓心的距離大於圓半徑

(2) 圓周上一點到圓心的距離等於圓半徑

(3) 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑



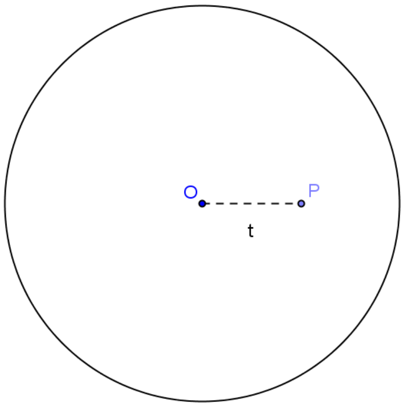
解：

敘述	理由
(1) 圓 O 半徑為 8 公分	已知
(2) P 點必在圓外	已知$\overline{OP}$＝10 公分＞8 公分＝圓 O 半徑
(3) Q 點必在圓周上	已知$\overline{OQ}$＝8 公分＝圓 O 半徑
(4) R 點必在圓內	已知$\overline{OR}$＝4 公分＜8 公分＝圓 O 半徑

習題 7.1-4

若圓 O 的半徑為 6 公分，P 為圓 O 內部一點，$\overline{OP}$＝t，則 t 的範圍為__________。

想法： 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑



解：

敘述	理由
(1) 0 公分＜$\overline{OP}$＜半徑	已知 P 為圓 O 內部一點 & 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑 & $\overline{OP}$為線段長度必大於 0
(2) 0 公分＜t＜6 公分	由(1) & 已知圓 O 的半徑為 6 公分 & $\overline{OP}$＝t

習題 7.1-5

已知圓 O 的半徑為 12 公分，且圓心 O 到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 8 公分、12 公分、16 公分，則：

(1) 直線________和圓 O 相交於兩點。

(2) 直線_______和圓 O 相交於一點。

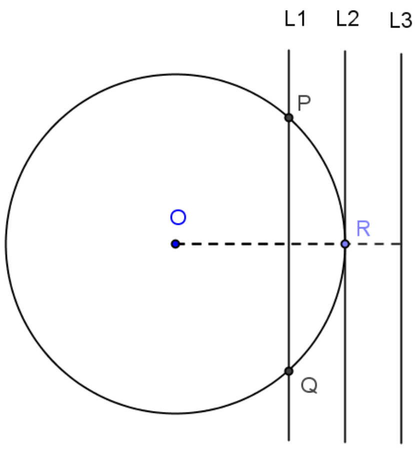
(3) 直線_______和圓 O 不相交。

想法：(1) 直線外一點到直線的最短距離為垂直線段(詳見例題 4.1-1)

(2) 直線到圓心的距離大於圓半徑，則直線與圓不相交

(3) 直線到圓心的距離等於圓半徑，則直線與圓相交於一點

(4) 直線到圓心的距離小於圓半徑，則直線與圓相交兩點



解：

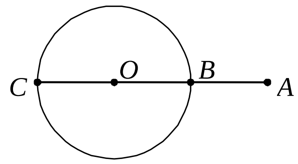
敘述	理由
(1) 直線 L_1 和圓 O 相交於 P、Q 兩點	圓心 O 到直線 L_1 的距離為 8 公分＜12 公分＝半徑
(2) 直線 L_2 和圓 O 相交於一點 R 點	圓心 O 到直線 L_2 的距離為 12 公分＝半徑
(3) 直線 L_3 和圓 O 不相交	圓心 O 到直線 L_3 的距離為 16 公分＞12 公分＝半徑

習題 7.1-6

若圓 O 的半徑為 6 公分，圓外一點 A 到圓心 O 的距離為 10 公分，則 A 點到圓 O 的最短距離是______，A 點到圓 O 的最長距離是______。

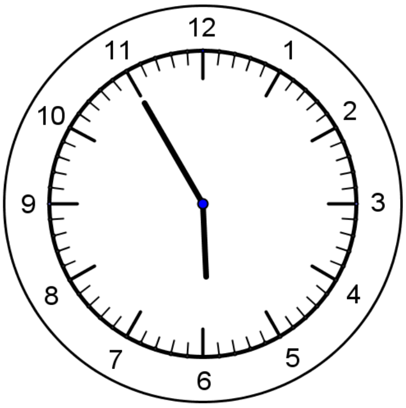
想法：圓外一點與圓的距離為點到圓周的線段長

解：

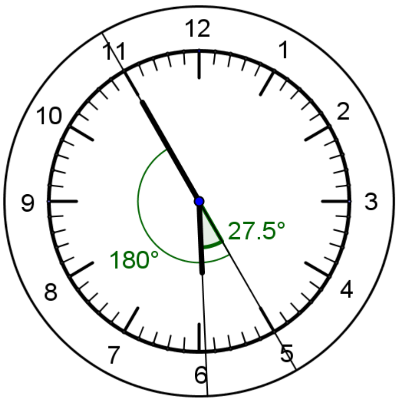
敘述	理由
(1) A 到圓 O 的最短距離為$\overline{AB}$，如右圖所示	
(2) $\overline{AB}=\overline{OA}-\overline{OB}$ $=10$ 公分-6 公分$=4$ 公分	已知$\overline{OA}=10$ 公分 & 半徑$\overline{OB}=6$ 公分
(3) A 到圓 O 的最長距離為$\overline{AC}$	如圖所示
(4) $\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$ $=10$ 公分$+6$ 公分$=16$ 公分	已知$\overline{OA}=10$ 公分 & 半徑$\overline{OC}=6$ 公分

習題 7.1-7

當時鐘在五點五十五分時，時針和分針的夾角為幾度？



想法：兩半徑所夾的角，叫圓心角



圖(a)

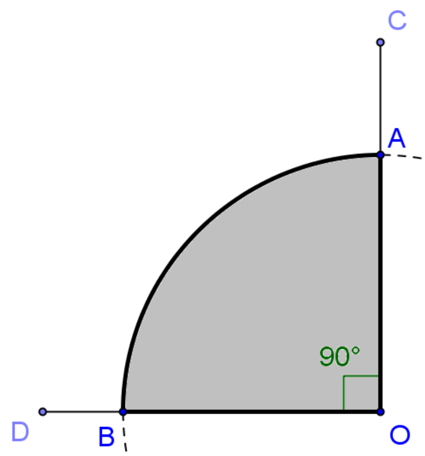
解：

敘述	理由
(1) 分針一分鐘走 6 度	分針 60 分鐘走 360 度⇒一分鐘 6 度
(2) 分針從 5 點 25 分走到 5 點 55 分共走了 180 度 (如上圖(a)所示)	分針 30 分鐘走 6 度×30 分＝180 度
(3) 時針一分鐘走 0.5 度	時針 60 分鐘走 30 度⇒一分鐘 0.5 度
(4) 時針從 5 點走到 5 點 55 分共走了 27.5 度(如上圖(a)所示)	時針 55 分鐘走 0.5 度×55 分＝27.5 度
(5) 所以五點五十五分時，時針分針夾角＝180 度－27.5 度＝152.5 度 (如上圖(a)所示)	由(2) & (4) 減法

習題 7.1-8

作一圓心角為 90°的扇形。

想法：兩半徑與所夾的弧圍成的圖形，叫做扇形。



作法：

(1) 在平面上取一線段$\overline{OD}$，利用 5.2-1 (通過線上一點作一垂直線的作圖)，過 O 點作$\overline{OC}\perp\overline{OD}$，則∠COD＝90°，如上圖所示。

(2) 以 O 點為圓心，以適當長度為半徑畫弧，此弧分別交$\overline{OC}$與$\overline{OD}$於 A、B 兩點，則扇形 OAB 即為所求，如上圖所示。

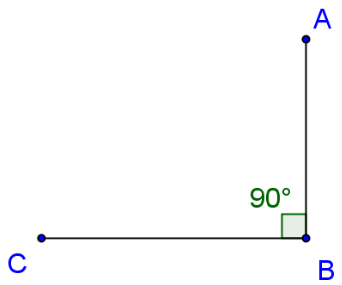
習題 7.1-9

作一圓周角其角度為 90°。

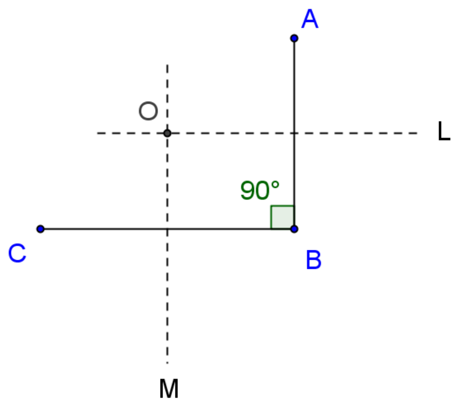
想法：(1) 過圓周上同一點的兩弦所夾的角，叫圓周角

(2) 三角形的外心到三頂點等距離

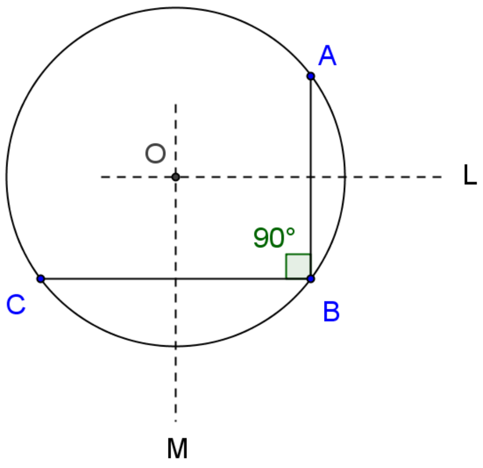
(3) 三角形三邊中垂線的交點為其外心



圖(a)



圖(b)



圖(c)

作法：

(1) 利用 5.2-1 (通過線上一點作一垂直線的作圖)，在平面上作∠ABC＝90°，如上圖(a)所示。

(2) 利用例題 5.2-4(線段的中垂線作圖)，分別作$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中垂線 L、M，且 L、M 兩線相交於 O 點，如上圖(b)所示。

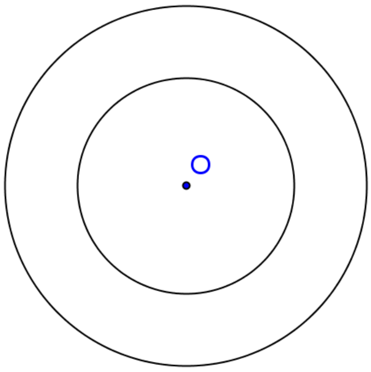
(3) 以 O 點為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓，則∠ABC＝90°為圓 O 之一圓周角，∠ABC 即為所求，如上圖(c)所示。

習題 7.1-10

試作兩同心圓，其直徑分別為 3 公分與 5 公分。

想法：(1) 半徑不同，圓心相同的諸圓，叫同心圓

(2) 直徑為半徑的兩倍

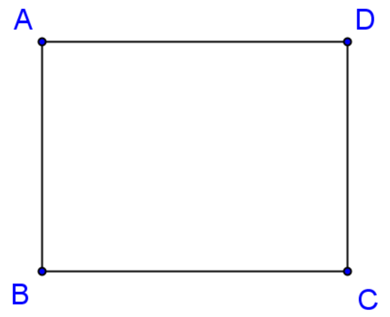


作法：

(1) 在平面上取一點 O 點，以 O 點為圓心，分別以 1.5 公分、2.5 公分為半徑畫兩圓，則大圓的直徑為 5 公分、小圓的直徑為 3 公分，兩圓即為所求之同心圓，如上圖所示。

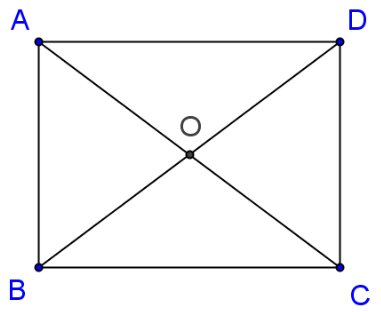
習題 7.1-11

試證矩形的四頂點在同一圓周上。

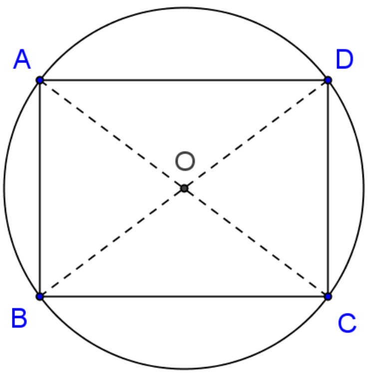


已知：如上圖所示，ABCD 為一矩形

求證：矩形 ABCD 的四頂點在同一圓周上



圖(a)



圖(b)

想法：(1) 矩形兩對角線等長

(2) 矩形兩對角線互相平分

證明：

敘述	理由
(1) 連接 A、C；B、D，如上圖(a)所示，則$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為矩形 ABCD 兩對角線且$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點	作圖，兩點可作一線段
(2) $\overline{AC}=\overline{BD}$	由(1) & 矩形兩對角線等長
(3) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ & $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	由(1) & 矩形兩對角線互相平分
(4) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\overline{OB}=\overline{OD}$	由(2) & (3) 遞移律

(5) 以 O 點為圓心，以$\overline{OA}$為半徑畫圓，如上圖(b)所示，此圓必通過 A、B、C、D 四點	由(4) $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}=\overline{OD}$ & 同圓半徑相等
(6) 所以矩形的四頂點在同一圓周上	由(5) 已證

習題 7.2

習題 7.2-1：

如圖 7.2-54，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 60°，試求其所對應的圓心角 ∠AOB。

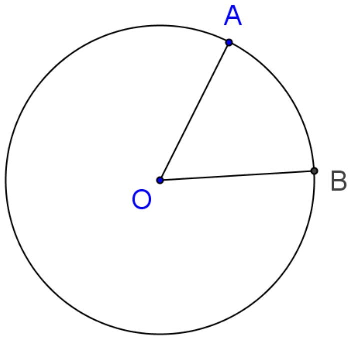


圖 7.2-54

想法： 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=60°$	已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 60°
(2) $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=60°$	由(1) $\overset{\frown}{AB}=60°$ & 圓心角 ∠AOB 等於所對弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數

習題 7.2-2：

如圖 7.2-55，圓 P 的半徑$\overline{PA}$為 8 公分，圓 Q 的半徑$\overline{QC}$為 4 公分，

$\angle$APB＝$\angle$CQD，$\overset{\frown}{\text{AB}}$＝60°。則：

(1) $\angle$CQD＝______度。　　　　(2) $\overset{\frown}{\text{CD}}$＝______度。

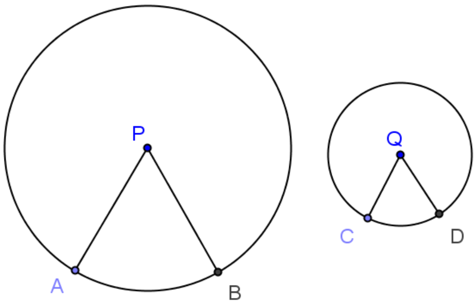


圖 7.2-55

想法：圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) 圓 P 中，$\angle$APB＝$\overset{\frown}{\text{AB}}$＝60°	圓心角$\angle$APB 等於所對弧$\overset{\frown}{\text{AB}}$的度數 ＆ 已知$\overset{\frown}{\text{AB}}$＝60°
(2) $\angle$CQD＝$\angle$APB＝60°	已知$\angle$APB＝$\angle$CQD ＆ (1)$\angle$APB＝60°
(3) 圓 Q 中，$\overset{\frown}{\text{CD}}$＝$\angle$CQD＝60°	圓心角$\angle$CQD 等於所對弧$\overset{\frown}{\text{CD}}$的度數 ＆ (2) $\angle$CQD＝60°　已證

習題 7.2-3：

如圖 7.2-56，將一圓平分成八等分，試求優弧$\overset{\frown}{ACB}$所對應的圓心角。

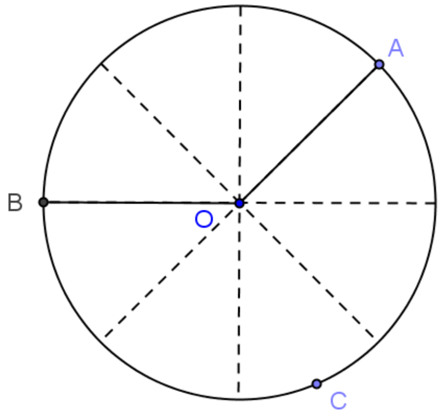


圖 7.2-56

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}=\dfrac{5}{8}\times$圓周	如圖，$\overset{\frown}{ACB}$占了 8 等分中的 5 等分
(2) $\overset{\frown}{ACB}=\dfrac{5}{8}\times 360°=225°$	將圓周 360°代入(1)
(3) $\angle AOB=\overset{\frown}{ACB}=225°$	由(2) & 圓心角$\angle AOB$ 等於所對弧$\overset{\frown}{ACB}$的度數

習題 7.2-4：

如圖 7.2-57，已知圓心角$\angle AOB=60°$，則$\overset{\frown}{AB}=$_____度，$\overset{\frown}{ACB}=$____度。

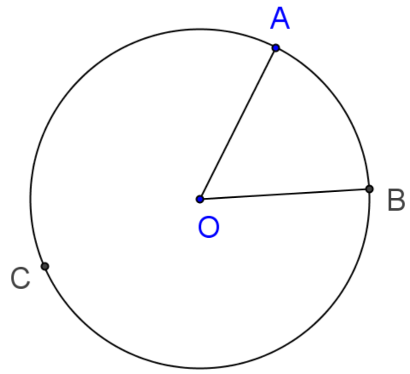


圖 7.2-57

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=60°$	圓心角$\angle AOB$等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數 & 已知$\angle AOB=60°$
(2) $\overset{\frown}{ACB}=360°-\overset{\frown}{AB}$ $=360°-60°=300°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周$=360°$ & 由(1) $\overset{\frown}{AB}=60°$已證

習題 7.2-5：

如圖 7.2-58，若 $\overset{\frown}{AB}=60°$，$\overset{\frown}{BC}=140°$，則 $\angle AOC$ 的度數＝？

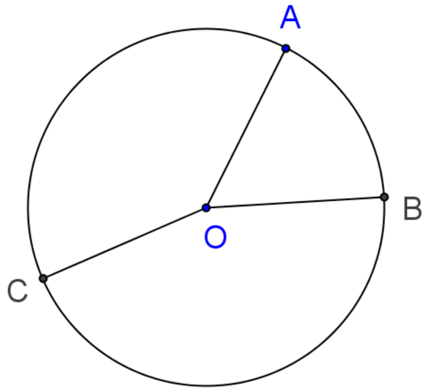


圖 7.2-58

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}=360°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}$ 為圓周＝360°
(2) $60°+140°+\overset{\frown}{CA}=360°$	將 $\overset{\frown}{AB}=60°$，$\overset{\frown}{BC}=140°$ 代入 (1)
(3) $\overset{\frown}{CA}=360°-60°-140°=160°$	由(2) 移項
(4) $\angle AOC=\overset{\frown}{CA}=160°$	圓心角 $\angle AOC$ 等於所對弧 $\overset{\frown}{CA}$ 的度數 & (3) $\overset{\frown}{CA}=160°$

習題 7.2-6：

如圖 7.2-59，已知 A、B、C 是圓 O 上相異三點，若$\overset{\frown}{ACB}$的度數比$\overset{\frown}{AB}$度數的 3 倍少 60°，則∠AOB＝________度。

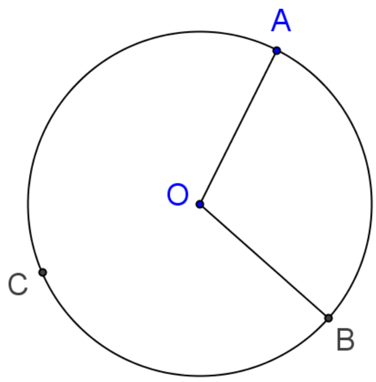


圖 7.2-59

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周＝360°
(5) $\overset{\frown}{ACB}=3\overset{\frown}{AB}-60°$	已知$\overset{\frown}{ACB}$的度數比 $\overset{\frown}{AB}$ 度數的 3 倍少 60°
(6) $\overset{\frown}{AB}+(3\overset{\frown}{AB}-60°)=360°$	將(2) $\overset{\frown}{ACB}=3\overset{\frown}{AB}-60°$ 代入(1)
(7) $\overset{\frown}{AB}=105°$	由(3) 解一元一次方程式
(8) ∠AOB＝$\overset{\frown}{AB}=105°$	由(4) $\overset{\frown}{AB}=105°$ ＆ 圓心角∠AOB 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數

習題 7.2-7：

如圖 7.2-60，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$皆為直徑，$\overset{\frown}{AC}=3x°$，$\overset{\frown}{CE}=4x°$，$\overset{\frown}{EB}=5x°$，則：

(1)　x＝________。

(2) ∠4＝______度。

(3) ∠6＝______度。

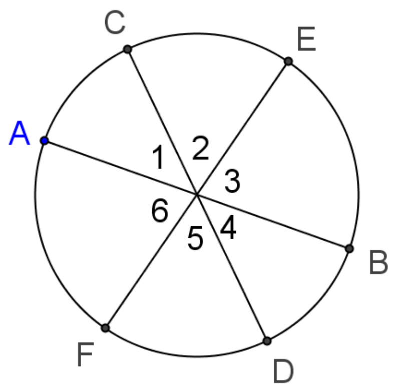


圖 7.2-60

想法：(1) 半圓周為 180°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=180°$	$\overline{AB}$為直徑 & $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}$為半圓 180°
(2) $3x°+4x°+5x°=180°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=3x°$，$\overset{\frown}{CE}=4x°$，$\overset{\frown}{EB}=5x°$代入(1)
(3) $x=15$	由(2) & 解一元一次方程式
(4) $\angle 1=\overset{\frown}{AC}=3x°=3\times 15°=45°$	圓心角∠1 等於所對弧$\overset{\frown}{AC}$的度數 & 已知$\overset{\frown}{AC}=3x°$
(5) $\angle 4=\angle 1=45°$	對頂角相等 & (4) $\angle 1=45°$
(6) $\angle 3=\overset{\frown}{EB}=5x°=5\times 15°=75°$	圓心角∠3 等於所對弧$\overset{\frown}{EB}$的度數 & 已知$\overset{\frown}{EB}=5x°$
(7) $\angle 6=\angle 3=75°$	對頂角相等 & (6) $\angle 3=75°$

習題 7.2-8：

如圖 7.2-61，若$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，且 $\overset{\frown}{AC}=4\overset{\frown}{BC}$，

則∠BOC＝______度。

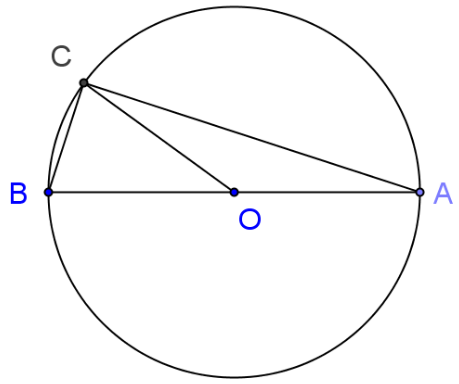


圖 7.2-61

想法：(1) 半圓周為 180°

(2) 圓心角為所對弧度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$	已知$\overline{AB}$是圓 O 的直徑 & $\overset{\frown}{ACB}$為圓周的一半
(2) $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ACB}=180°$	如圖所示$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ACB}$ & 由(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$
(3) $4\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}=180°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=4\overset{\frown}{BC}$代入(2)
(4) $\overset{\frown}{BC}=180°\div5=36°$	由(3) 解一元一次方程式
(5) ∠BOC＝$\overset{\frown}{BC}=36°$	圓心角∠BOC 為所對弧$\overset{\frown}{BC}$的度數 & (4)$\overset{\frown}{BC}=36°$

習題 7.2-9：

如圖 7.2-62，兩同心圓的圓心為 O，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為小圓的半徑，$\overline{OC}$、$\overline{OD}$為大圓的半徑。已知∠AOB＝60°，則：

(1) ∠COD＝______度。　　(2) $\overset{\frown}{AB}$＝______度，$\overset{\frown}{CD}$＝______度。

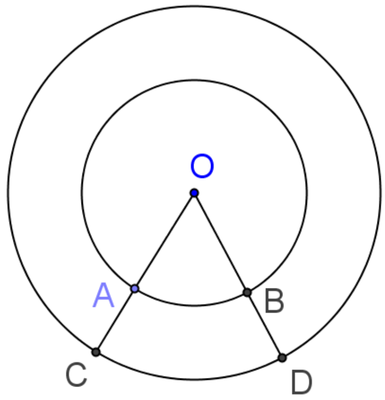


圖 7.2-62

想法：(1) 同心圓圓心角相等

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) ∠COD＝∠AOB＝60°	同心圓圓心角∠COD 與∠AOB 相等
(2) $\overset{\frown}{AB}$＝∠AOB＝60°	圓心角∠AOB 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數 & 已知∠AOB＝60°
(3) $\overset{\frown}{CD}$＝∠COD＝60°	圓心角∠COD 等於所對弧$\overset{\frown}{CD}$的度數 & (1) ∠COD＝60°

習題 7.2-10：

如圖 7.2-63，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，且$\overline{AB}=\overline{CD}$。若$\overset{\frown}{AB}=60°$，則$\overset{\frown}{CD}=$____度。

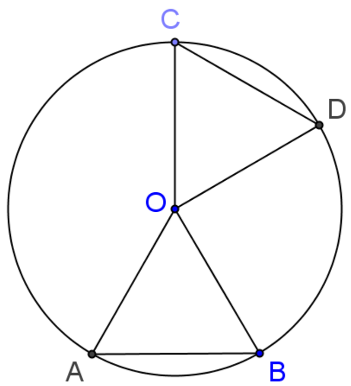


圖 7.2-63

想法：等弦對等弧定理

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}$	已知$\overline{AB}=\overline{CD}$ & 等弦對等弧定理
(2) $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}=60°$	由(1) & 已知$\overset{\frown}{AB}=60°$

習題 7.2-11：(試證同圓或等圓中，等圓心角必對等弦。)

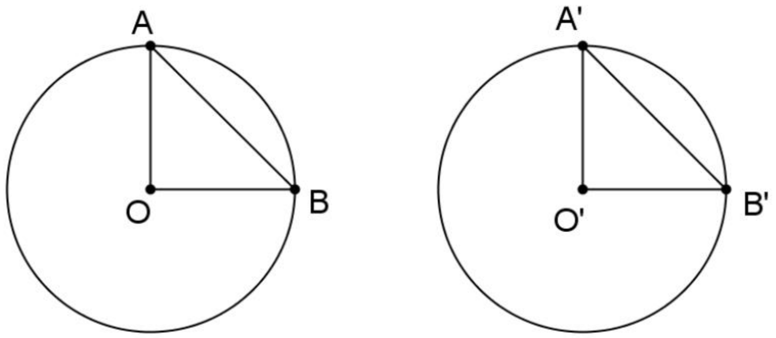


圖 7.2-64

已知：如圖 7.2-64，圓 O 與圓 O'兩圓之半徑相等，∠AOB＝∠A'O'B'。

求證：$\overline{AB}=\overline{A'B'}$

想法：(1) 等圓心角對等弧定理

(2) 等弧對等弦定理

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$	已知∠AOB＝∠A'O'B' ＆ 等圓心角對等弧定理
(2) $\overline{AB}=\overline{A'B'}$	由(1) ＆ 等弧對等弦定理

習題 7.2-12：

如圖 7.2-65，$\overline{AB}$為圓 O 直徑，$\overline{DE}$為圓 O 之一弦，若$\overline{AB}\perp\overline{DE}$，且$\overline{DE}=10$公分、$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=120°$，試求：(1) $\overline{CD}=$？　　(2) $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=$？

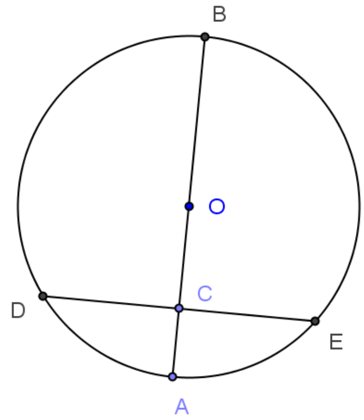


圖 7.2-65

想法：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{CE}$ & $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$	已知$\overline{AB}$為圓 O 直徑，$\overline{DE}$為圓 O 之一弦，且$\overline{AB}\perp\overline{DE}$ & 垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧
(2) $\overline{CD}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{DE}$ $=\frac{1}{2}\times 10$ 公分$=5$ 公分	由(1) & 已知$\overline{DE}=10$ 公分
(3) $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\times 120°=60°$	由(1) & 已知$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=120°$

習題 7.2-13：

如圖 7.2-66，$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為圓 O 之兩弦，已知$\overline{CD}=\overline{EF}$、$\overline{OA}\perp\overline{CD}$、$\overline{OB}\perp\overline{EF}$且$\overline{OA}=10$ 公分，則$\overline{OB}=$？

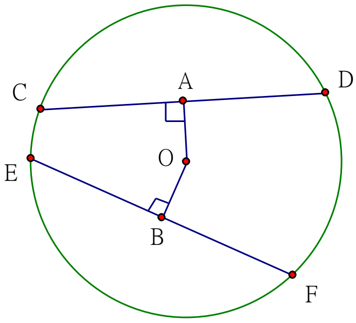


圖 7.2-66

想法：在同圓中，若兩弦相等，則與圓心的距離也相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OB}=\overline{OA}$	已知$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為圓 O 之兩弦，且$\overline{CD}=\overline{EF}$、$\overline{OA}\perp\overline{CD}$、$\overline{OB}\perp\overline{EF}$ & 在同圓中，若兩弦相等，則與圓心的距離也相等
(2) $\overline{OB}=\overline{OA}=10$ 公分	由(1) & 已知$\overline{OA}=10$ 公分

習題 7.2-14：

如圖 7.2-67，A、B、C、D 四點都在圓 O 上，∠AOC＝160°，則$\overset{\frown}{ABC}$＝____度，$\overset{\frown}{ADC}$＝____度，∠B＝____度。

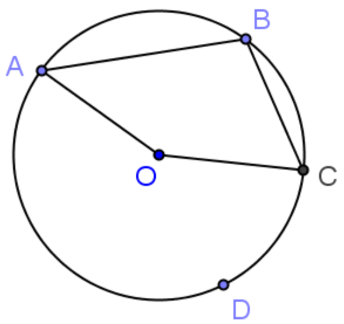


圖 7.2-67

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 直徑將圓周分為一半

3. 圓周 360°

解：

敘述	理由
(1) ∠AOC 為$\overset{\frown}{ABC}$所對的圓心角	如圖所示，∠AOC 對$\overset{\frown}{ABC}$
(2) $\overset{\frown}{ABC}$＝∠AOC＝160°	由(1)圓心角∠AOC 等於所對弧$\overset{\frown}{ABC}$的度數 & 已知∠AOC＝160°
(3) $\overset{\frown}{ABC}$＋$\overset{\frown}{ADC}$＝360°	如圖所示，$\overset{\frown}{ABC}$＋$\overset{\frown}{ADC}$為圓周 360°
(4) 160°＋$\overset{\frown}{ADC}$＝360°	將(2) $\overset{\frown}{ABC}$＝160° 代入(3)
(5) $\overset{\frown}{ADC}$＝360°－160°＝200°	由(4) 移項
(6) ∠B 為$\overset{\frown}{ADC}$所對的圓周角	如圖 7.2-67 所示，∠B 對$\overset{\frown}{ADC}$
(7) ∠B＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$＝$\frac{1}{2}$×200°＝100°	由(6) 圓周角∠B 為所對弧$\overset{\frown}{ADC}$度數的一半

	& (5) $\overset{\frown}{ADC}$＝200°

習題 7.2-15：

如圖 7.2-68，△ABC 三頂點皆在圓周上，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$。已知∠B＝65°，則 $\overset{\frown}{BC}$ 的度數＝？

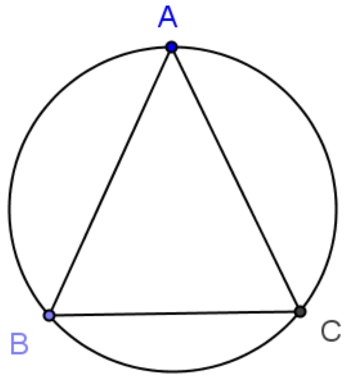


圖 7.2-68

想法：1. 三角形內角和 180°

2. 圓周角的性質有：
   (1) 圓周角為所對弧度的一半
   (2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
   (3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
   (4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
   (5) 同弧之圓周角相等
   (6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$
(2) ∠C＝∠B＝65°	等腰三角形兩底角相等 & 已知∠B＝65°
(3) △ABC 中， ∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖 7.2-68 所示 三角形內角和 180°
(4) ∠A＋65°＋65°＝180°	將(2) ∠C＝∠B＝65° 代入(3)式得
(5) ∠A＝180°－65°－65°＝50°	由(4) 移項
(6) $\overset{\frown}{BC}$＝2∠A＝2x50°＝100°	弧度($\overset{\frown}{BC}$)為所對圓周角(∠A)的 2 倍 & 由(5) ∠A＝50°

習題 7.2-16：

如圖 7.2-69，△ABC 三頂點皆在圓周上。若∠C＝65°，則∠AOB＝____度。

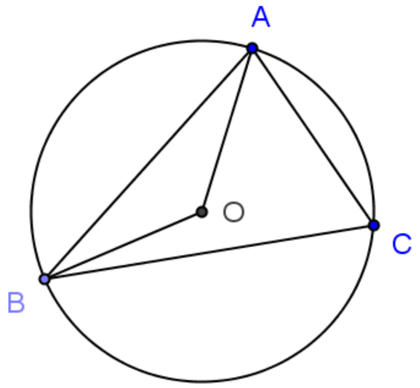


圖 7.2-69

想法：圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) ∠AOB 為$\overset{\frown}{AB}$所對之圓心角	如圖 7.2-69 所示
(2) ∠C 為$\overset{\frown}{AB}$所對之圓周角	如圖 7.2-69 所示
(3) ∠AOB＝2∠C＝2×65°＝130°	由(1) & (2) 同弧$\overset{\frown}{AB}$之圓心角∠AOB 為圓周角∠C 的 2 倍 & 已知∠C＝65°

習題 7.2-17：

如圖 7.2-70，A、B、C 三點都在圓周上，$\angle BOC=110°$，則 $\angle A=$______度。

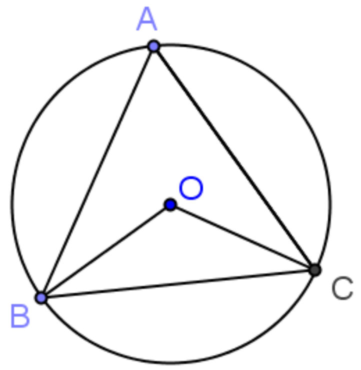


圖 7.2-70

想法： 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) $\angle A$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角	如圖 7.2-70 所示，$\angle A$ 對 $\overset{\frown}{BC}$
(2) $\angle BOC$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓心角	如圖 7.2-70 所示，$\angle BOC$ 對 $\overset{\frown}{BC}$
(3) $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 110°=55°$	由(1)(2)同弧 $\overset{\frown}{BC}$ 之圓周角 $\angle A$ 等於圓心角 $\angle BOC$ 的一半 & 已知 $\angle BOC=110°$

習題 7.2-18：

如圖 7.2-71，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$是圓的兩弦，且相交於 E 點。若∠B＝65°，∠A＝45°，則：(1) ∠1＝_______度。(2) ∠2＝_______度。

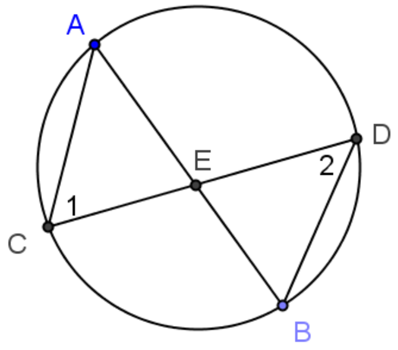


圖 7.2-71

想法：圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) ∠B 為$\overset{\frown}{AD}$所對之圓周角	如圖 7.2-71 所示，∠B 對$\overset{\frown}{AD}$
(2) ∠1 為$\overset{\frown}{AD}$所對之圓周角	如圖 7.2-71 所示，∠1 對$\overset{\frown}{AD}$
(3) ∠1＝∠B＝65°	由(1) & (2) 同弧$\overset{\frown}{AD}$所對之圓周角∠1 與∠B 相等 & 已知∠B＝65°
(4) ∠A 為$\overset{\frown}{BC}$所對之圓周角	如圖 7.2-71 所示，∠A 對$\overset{\frown}{BC}$
(5) ∠2 為$\overset{\frown}{BC}$所對之圓周角	如圖 7.2-71 所示，∠2 對$\overset{\frown}{BC}$
(6) ∠2＝∠A＝45°	由(4) & (5) 同弧$\overset{\frown}{BC}$所對之圓周角∠2 與∠A

	相等＆ 已知∠A＝45°

習題 7.2-19：

如圖 7.2-72，$\overline{AB}$ 為直徑，求∠C、∠D、∠E 各為幾度？

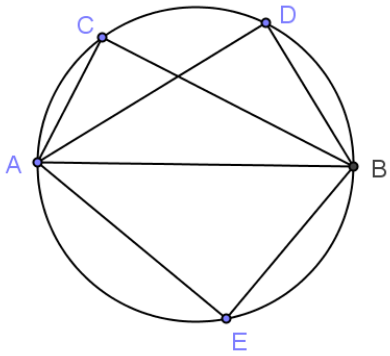


圖 7.2-72

想法：圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) ∠C 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-72 所示 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(2) ∠C＝90°	由(1) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠C 為直角
(3) ∠D 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-72 所示 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(4) ∠D＝90°	由(3) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠D 為直角
(5) ∠E 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-72 所示 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(6) ∠E＝90°	由(5) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠E 為直角

習題 7.2-20：

如圖 7.2-73，△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{BC}$為圓 O 的直徑。已知

∠B＝20°，則∠C＝_____度。

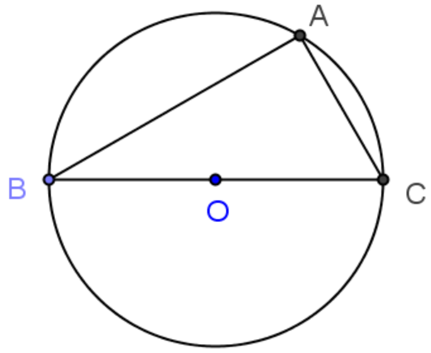


圖 7.2-73

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為直徑$\overline{BC}$所對的圓周角	如圖 7.2-73 所示 ＆ 已知$\overline{BC}$為圓 O 的直徑
(2) ∠A＝90°	由(1) ＆ 直徑所對的圓周角為直角
(3) 三角形 ABC 中， ∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖 7.2-73 所示 三角形內角和 180°
(4) 90°＋20°＋∠C＝180°	將(2) ∠A＝90° ＆ 已知 ∠B＝20° 代入(3)式得
(5) ∠C＝180°－90°－20°＝70°	由(4) 移項

習題 7.2-21：

如圖 7.2-74，兩弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$相交於圓內一點 P。若 $\overset{\frown}{AC}=20°$，$\overset{\frown}{BD}=50°$，則∠BPD＝________度。

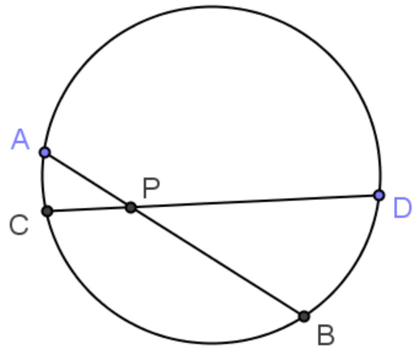


圖 7.2-74

想法：圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠BPD 為圓內角	如圖 7.2-74，已知 P 點為兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$在圓內的交點
(2) $\angle BPD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})$	由(1) 圓內角∠BPD 的度數，等於這角∠BPD 與它的對頂角∠CPA 所對兩弧$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$度數和的一半
(3) $\angle BPD=\frac{1}{2}(50°+20°)$ $=35°$	將已知$\overset{\frown}{BD}=50°$ & $\overset{\frown}{AC}=20°$代入(2)式得

習題 7.2-22：

如圖 7.2-75，圓 A 與圓 B 相交於 C、D 兩點，若$\overline{CD}$＝8 公分，則：

(1) $\overline{CE}$＝？　　(2) ∠CEB＝？

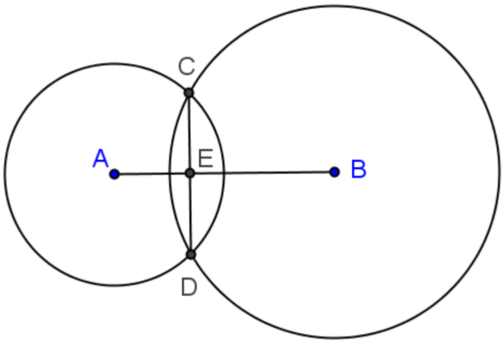


圖 7.2-75

想法：相交兩圓的兩圓心連線(連心線)，必垂直平分這兩圓的公弦

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$為連心線 & $\overline{CD}$為公弦	已知圓 A 與圓 B 相交於 C、D 兩點
(2) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & $\overline{CE}=\overline{DE}$	由(1) 連心線必垂直平分這兩圓的公弦
(3) ∠CEB＝90° & $\overline{CE}$＝4 公分	由(2) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & $\overline{CE}=\overline{DE}$ & 已知$\overline{CD}$＝8 公分

習題 7.2-23： **過直徑兩端的弦，若與這直徑所成的角相等，則這兩弦相等。**

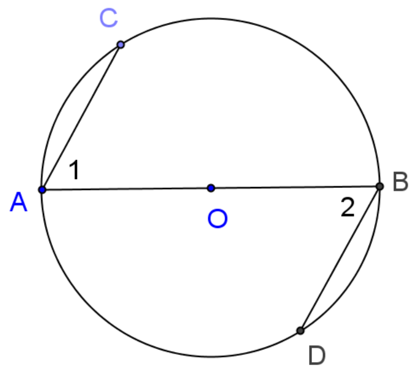


圖 7.2-76

已知：如圖 7.2-76 中，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，∠1＝∠2。
求證：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$。

想法：1. 圓周角的性質有：
(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 直徑將圓周分為兩等份

3. 等弧對等弦

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}$＝$\overset{\frown}{BDA}$	已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑 ＆ 直徑將圓周分為兩等份
(2) $\overset{\frown}{BC}$＝2∠1	如圖 7.2-76，弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) $\overset{\frown}{AD}$＝2∠2	如圖 7.2-76，弧度為所對圓周角的 2 倍
(4) $\overset{\frown}{BC}$＝2∠1＝2∠2＝$\overset{\frown}{AD}$	由(2) ＆ (3) ＆ 已知∠1＝∠2 遞移律
(5) $\overset{\frown}{ACB}$＝$\overset{\frown}{AC}$＋$\overset{\frown}{BC}$	如圖 7.2-76 所示，全量等於分量之和

(6) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{BC}$	由(5) 移項 &
$=\overset{\frown}{BDA}-\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$	由(1) $\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{BDA}$ & (4) $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$
(7) $\overline{AC}=\overline{BD}$	由(6) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ & 等弧對等弦

習題 7.3

習題 7.3-1：

有一個圓 O，其半徑為 7 公分，判斷直線 L 與圓的相交情形及交點個數。

圓心 O 到直線 *L* 距離	10 公分	7 公分	3 公分
交點個數			

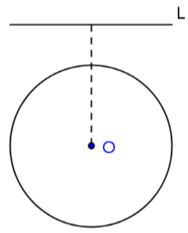
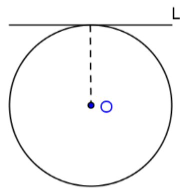
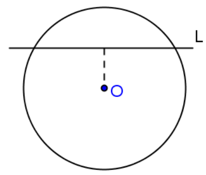
想法：直線與圓的關係

(1) 若直線到圓心的距離**大於半徑長**，則直線與圓**不相交**；

(2) 若直線到圓心的距離**等於半徑長**，則直線與圓**相交於一點**，且此直線稱為此圓的**切線**；

(3) 若直線到圓心的距離**小於半徑長**，則直線與圓**相交於兩個點**，且此直線稱為此圓的**割線**。

解：

敘述	理由
(1) 如右圖所示，圓 O 半徑為 7 公分，直線 L 到圓心 O 的距離為 10 公分，則此直線 L 與圓 O 沒有交點	10 公分＞7 公分 
(2) 如右圖所示，圓 O 半徑為 7 公分，直線 L 到圓心 O 的距離為 7 公分，則此直線 L 與圓 O 交於一點	7 公分＝7 公分 
(3) 如右圖所示，圓 O 半徑為 7 公分，直線 L 到圓心 O 的距離為 3 公分，則此直線 L 與圓 O 相交於 2 點	3 公分＜7 公分 

習題 7.3-2： 過直徑兩端的兩切線必平行。

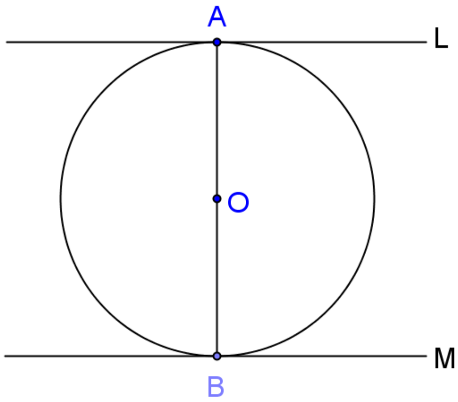


圖 7.3-68

已知：如圖 7.3-68，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，L 與 M 為圓 O 的兩切線，且 L 切圓 O 於 A 點、M 切圓 O 於 B 點

求證：L || M

想法：(1) 切線與過切點的半徑互相垂直

(2) 垂直於同一直線的兩直線互相平行

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}\perp$L （即$\overline{AB}\perp$L）	已知 L 圓 O 的切線 & 切線與過切點的半徑互相垂直 （已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑）
(2) $\overline{OB}\perp$M （即$\overline{AB}\perp$M）	已知 M 圓 O 的切線 & 切線與過切點的半徑互相垂直 （已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑）
(3) 所以 L || M	由(1) $\overline{AB}\perp$L & (2) $\overline{AB}\perp$M 垂直於同一直線的兩直線互相平行

習題 7.3-3：

如圖 7.3-69，P 點在圓 O 的外部，$\overline{PA}$與$\overline{PB}$分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若∠P＝35°，則∠AOB＝________度。

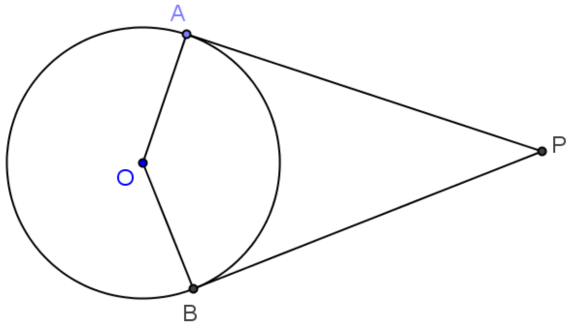


圖 7.3-69

想法：利用切線與過切點的半徑互相垂直

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\perp\overline{OA}$，∠OAP＝90°	已知$\overline{PA}$與圓 O 相切於 A 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) $\overline{PB}\perp\overline{OB}$，∠OBP＝90°	已知$\overline{PB}$與圓 O 相切於 B 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(3) 四邊形 OAPB 中，∠OAP＋∠OBP＋∠P＋∠AOB＝360°	如圖 7.3-69 所示，四邊形內角和為 360°
(4) 90°＋90°＋35°＋∠AOB＝360°	將(1) ∠OAP＝90°、(2) ∠OBP＝90° & 已知∠P＝35° 代入(3)式得
(5) ∠AOB＝360°－90°－90°－35°＝145°	由(4)式移項得

習題 7.3-4：

如圖 7.3-70，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$為圓 O 之切線，A、B 為切點。若$\overline{BC}$＝10 公分，

則$\overline{AC}$＝？

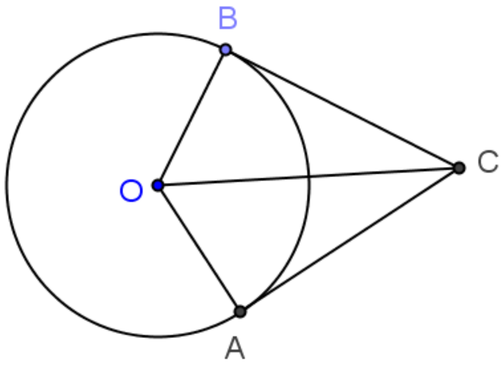


圖 7.3-70

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}=\overline{BC}$	已知 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$為圓 O 之切線，A、B 為切點。 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(2) $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ 公分	由(1) & 已知$\overline{BC}=10$ 公分

習題 7.3-5：

如圖 7.3-71，已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓相切於 D、E、F 三點。

若 $\overline{AD}$＝20 公分，求$\overline{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{AC}$之值。

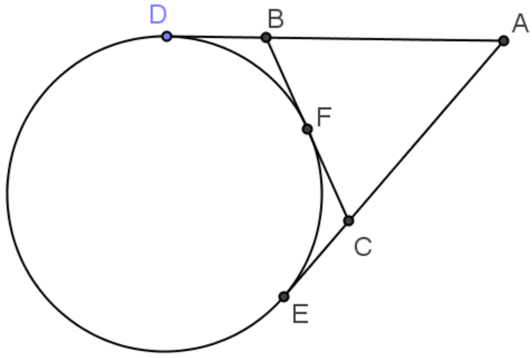


圖 7.3-71

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AE}=\overline{AD}=20$ 公分	已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$分別與圓相切於 D、E 兩點 ＆ 圓外一點到圓的兩切線等長 ＆ 已知$\overline{AD}=20$ 公分
(2) $\overline{BD}$、$\overline{BF}$、$\overline{CF}$、$\overline{CE}$皆為切線	已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$皆為切線
(3) $\overline{BF}=\overline{BD}$	由(2) $\overline{BD}$、$\overline{BF}$為切線 ＆ 圓外一點到圓的兩切線等長
(4) $\overline{CF}=\overline{CE}$	由(2) $\overline{CF}$、$\overline{CE}$為切線 ＆ 圓外一點到圓的兩切線等長
(5) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ $=\overline{AB}+(\overline{BF}+\overline{CF})+\overline{AC}$ $=(\overline{AB}+\overline{BF})+(\overline{CF}+\overline{AC})$ $=(\overline{AB}+\overline{BD})+(\overline{CE}+\overline{AC})$ $=\overline{AD}+\overline{AE}$ ＝(20 公分)＋(20 公分) ＝40 公分	題目所求 如圖 7.3-71，$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$ 加法結合律 將(3) $\overline{BF}=\overline{BD}$ ＆ (4) $\overline{CF}=\overline{CE}$ 代入 如圖 7.3-71，$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}$ ＆ $\overline{CE}+\overline{AC}=\overline{AE}$ 將(1) $\overline{AE}=\overline{AD}=20$ 公分 代入
(6) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=40$ 公分	由(5)

習題 7.3-6：

圖 7.3-72 中，已知△ABC 為直角三角形，∠A＝90°，且 I 點為△ABC 的內心，若$\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分、$\overline{BC}$＝13 公分，則△ABC 內切圓半徑為何？

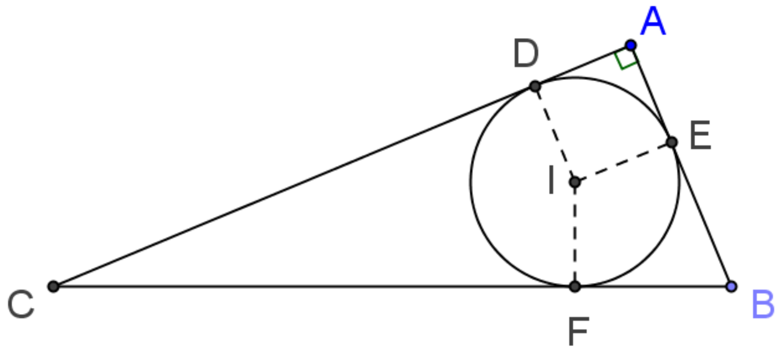


圖 7.3-72

想法：若△ABC 為直角三角形，∠A＝90°，則△ABC 內切圓半徑＝$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$

解：

敘述	理由
(1) △ABC 內切圓半徑 $=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{5公分+12公分-13公分}{2}$ ＝2 公分	若△ABC 為直角三角形，∠A＝90°，則△ABC 內切圓半徑＝$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ & 已知$\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分、$\overline{BC}$＝13 公分

習題 7.3-7：

已知圓 A 與圓 B 的連心線段長為 10 單位。若圓 A 與圓 B 的半徑分別如下，試問兩圓位置關係各為何？

圓 O_1 的半徑	2 單位	5 單位	4 單位	7 單位	15 單位
圓 O_2 的半徑	3 單位	7 單位	6 單位	21 單位	25 單位
兩圓位置關係					

想法：判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。

(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。

(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。

(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。

(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。

(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$＝10 單位＞(2＋3) 單位 所以圓 A 與圓 B 外離	已知$\overline{AB}$＝10 單位 ＆ 圓 A 及圓 B 的半徑各為 2 單位及 3 單位 ＆ 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離
(2) (7－5) 單位＜$\overline{AB}$＝10 單位＜(7＋5) 單位 所以圓 A 與圓 B 交於兩點	已知$\overline{AB}$＝10 單位 ＆ 圓 A 及圓 B 的半徑各為 7 單位及 5 單位 ＆ 兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點
(3) $\overline{AB}$＝10 單位＝(4＋6) 單位 所以圓 A 與圓 B 外切	已知$\overline{AB}$＝10 單位 ＆ 圓 A 及圓 B 的半徑各為 4 單位及 6 單位 ＆ 連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切
(4) $\overline{AB}$＝10 單位＜(21－7) 單位 所以圓 A 與圓 B 內離	已知$\overline{AB}$＝10 單位 ＆ 圓 A 及圓 B 的半徑各為 21 單位及 7 單位 ＆ 連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離
(5) $\overline{AB}$＝10 單位＝(25－15) 單位 所以圓 A 與圓 B 內切	已知$\overline{AB}$＝10 單位 ＆ 圓 A 及圓 B 的半徑各為 25 單位及 15 單位 ＆ 連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切

習題 7.3-8：

已知大、小兩圓的半徑分別為 5r、3r，當兩圓內切時，其連心線段長為 6 公分，則當兩圓外切時，則連心線段長為________cm。

想法：(1) 若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和

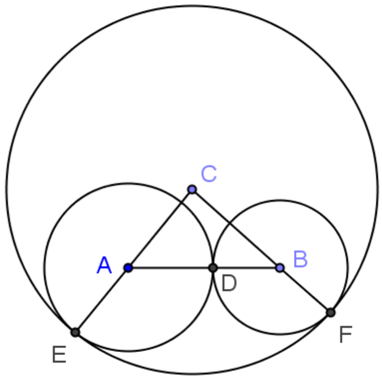
(2) 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差。

解：

敘述	理由
(1) 5r－3r＝6 cm	已知兩圓內切時，其連心線段長為 6 cm ＆ 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差
(2) r＝3 cm	由(1) 解一元一次方程式
(3) 連心線長＝5r＋3r＝8 r	若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和
(4) 所以連心線長＝8×(3cm) ＝24 公分	將(2) r＝3 cm 代入(3)式得

習題 7.3-9：

設有 A、B、C 三圓，圓 A 與圓 B 外切，且兩圓同時和圓 C 內切。若圓 A 的半徑為 5 公分，圓 B 半徑為 4 公分，圓 C 半徑為 11 公分，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$之值為何？



圖(a)

想法：(1) 若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和

(2) 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差。

解：

敘述	理由
(1) 依題意繪圖，如上圖(a)所示	由已知圓 A 與圓 B 外切，且兩圓同時和圓 C 內切作圖
(2) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$	已知 A、B 兩圓外切 & 連心線長＝兩半徑和
(3) $\overline{AB}$＝5 公分＋4 公分 ＝9 公分	將已知圓 A 半徑$\overline{AD}$＝5 公分 & 圓 B 半徑$\overline{BD}$＝4 公分　代入(2)
(4) $\overline{BC}=\overline{CF}-\overline{BF}$	已知 B、C 兩圓內切 & 連心線長＝兩半徑差
(5) $\overline{BC}$＝11 公分－4 公分 ＝7 公分	將已知圓 B 半徑$\overline{BF}$＝4 公分 & 圓 C 半徑$\overline{CF}$＝11 公分　代入(4)
(6) $\overline{AC}=\overline{CE}-\overline{AE}$	已知 A、C 兩圓內切 & 連心線長＝兩半徑差
(7) $\overline{AC}$＝11 公分－5 公分 ＝6 公分	將已知圓 A 半徑$\overline{AE}$＝5 公分 & 圓 C 半徑$\overline{CE}$＝11 公分　代入(6)
(8) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ ＝(9＋7＋6) 公分 ＝22 公分	由(3)式＋(5)式＋(7)式得

習題 7.3-10：

已知圓 O_1 與圓 O_2 的連心線段長為 10 公分，若圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別如下表，請完成下表。

圓 O_1 半徑	6 公分	5 公分	4 公分	5 公分	6 公分
圓 O_2 半徑	16 公分	3 公分	6 公分	8 公分	20 公分
兩圓位置關係					
公切線數					

想法： 1. 在同一平面上，若兩圓外離，則此兩圓共有 4 條公切線，其中 2 條為內公切線，2 條為外公切線。

2. 在同一平面上，若兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線，其中 1 條為內公切線，2 條為外公切線。

3. 在同一平面上，若兩圓相交於兩點，則此兩圓共有 2 條公切線，且此 2 條皆為外公切線。

4. 在同一平面上，若兩圓內切，則此兩圓只有 1 條公切線，且此公切線為外公切線。

5. 在同一平面上，若兩圓內離，則此兩圓沒有公切線。

解：

敘述	理由
(1) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 6 公分、16 公分，則圓 O_1 與圓 O_2 內切 所以圓 O_1 與圓 O_2 只有一條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 6 公分、16 公分，連心線段長為 10 公分 $\Rightarrow$10 公分＝(16－6) 公分 & 連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切 & 兩圓內切，則此兩圓只有 1 條公切線
(2) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 公分、3 公分，則圓 O_1 與圓 O_2 外離 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 4 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 公分、3 公分，連心線段長為 10 公分 $\Rightarrow$10 公分＞(5＋3)公分 & 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離 & 兩圓外離，則此兩圓共有 4 條公切線
(3) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 4 公分、6 公分，則圓 O_1 與圓 O_2 外切 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 3 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 4 公分、6 公分，連心線段長為 10 公分 $\Rightarrow$10 公分＝(4＋6) 公分 & 連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切 & 兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線

(4) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 公分、8 公分，則圓 O_1 與圓 O_2 交於 2 點 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 2 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 公分、8 公分，連心線段長為 10 公分 $\Rightarrow$(8－5)公分＜10 公分＜(8＋5)公分 ＆ 兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和 則兩圓相交於 2 點 ＆ 兩圓相交於 2 點，則此兩圓共有 2 條公切線
(5) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 6 公分、20 公分，則圓 O_1 與圓 O_2 內離 所以圓 O_1 與圓 O_2 沒有公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 6 公分、20 公分，連心線段長為 10 公分 $\Rightarrow$10 公分＜(20－6) 公分 ＆ 連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離 ＆ 兩圓內離，則此兩圓沒有公切線

習題 7.3-11： 兩圓外切，過切點的內公切線，必平分這兩圓的外公切線。

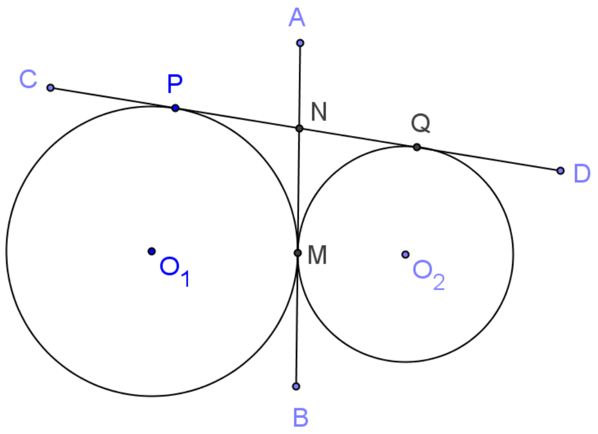


圖 7.3-73

已知： 如圖 7.3-73，圓 O_1 與圓 O_2 兩圓外切於 M 點，$\overline{AB}$為兩圓的內公切線，$\overline{CD}$為圓 O_1 及圓 O_2 兩圓的外公切線，切點分別為點 P 與點 Q，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於點 N。

求證： $\overline{PN}=\overline{NQ}$

想法： 利用圓外一點到圓的兩切線等長

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{PN}=\overline{NM}$	已知$\overline{AB}$為圓 O_1 的切線、$\overline{CD}$為圓 O_1 的切線，切點分別為點 M 與點 P，且$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於點 N & 圓外一點到圓的兩切線等長
(2) $\overline{NQ}=\overline{NM}$	已知$\overline{AB}$為圓 O_2 的切線、$\overline{CD}$為圓 O_2 的切線，切點分別為點 M 與點 Q，且$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於點 N & 圓外一點到圓的兩切線等長
(3) 所以$\overline{PN}=\overline{NQ}$	由(1) $\overline{PN}=\overline{NM}$ & (2) $\overline{NQ}=\overline{NM}$ 遞移律

習題 7.3-12：

圖 7.3-74 中，$\overline{DE}$為圓的切線，A 為切點，C 為$\overset{\frown}{AB}$的中點，求證$\overline{CA}$為∠BAD 的角平分線。

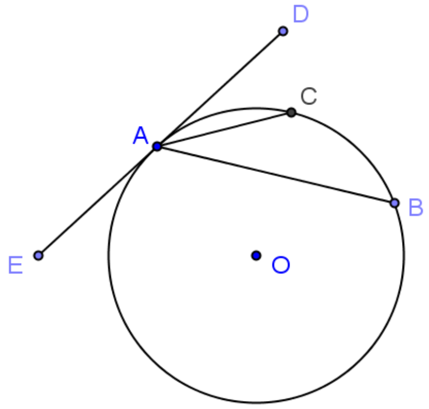


圖 7.3-74

想法：(1) 弦切角為所對弧度的一半

(2) 圓周角為所對弧度的一半

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$	已知 C 為$\overset{\frown}{AB}$的中點
(2) ∠CAD 為$\overset{\frown}{AC}$所對的弦切角	已知$\overline{DE}$為圓的切線，A 為切點，C 為$\overset{\frown}{AB}$的中點，$\overline{CA}$為一弦 & 弦切角定義
(3) $\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	由(2) & 弦切角為所對弧度的一半
(4) $\angle CAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	圓周角為所對弧度的一半
(5) ∠CAD＝∠CAB	由(1)、(3) & (4) 遞移律
(6) 所以$\overline{CA}$為∠BAD 的角平分線	由(5) 已證

習題 7.3-13：

如圖 7.3-75，ABCDE 為正五邊形，且 5 個頂點皆在圓周上，若$\overline{PQ}$切圓 O 於 A 點，則∠PAE＝？

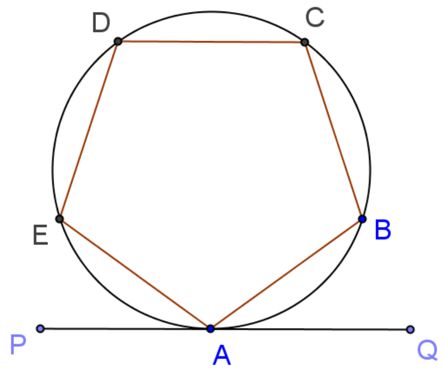


圖 7.3-75

想法：(1) 利用正五邊形五個頂點將圓周五等分 & 圓周為 360°，可以得知 $\overset{\frown}{AE}$＝72°；

(2) 利用$\overset{\frown}{AE}$＝72° & 弦切角等於所對弧度的一半，可以得知∠PAE＝36°

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AE}$＝360°÷5＝72°	已知 ABCDE 為正五邊形，且 5 個頂點皆在圓周上，五個頂點將圓周五等分 & 圓周為 360°
(2) ∠PAE＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}$＝$\frac{1}{2}$×72° ＝36°	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半 & (1) $\overset{\frown}{AE}$＝72°

習題 7.3-14：

如圖 7.3-76，$\overline{AD}$切圓於 C 點。若 $\overset{\frown}{EB}=150°$，$\angle B=30°$，

(1) 求$\angle ACE$ 的度數。　　(2) 求$\angle BCD$ 的度數。

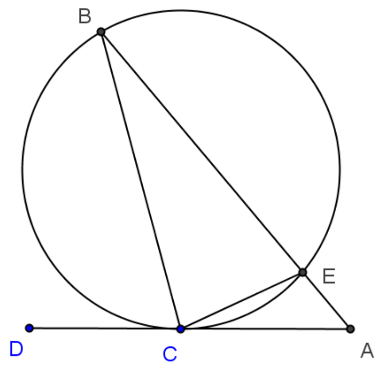


圖 7.3-76

想法：(1) 利用已知$\angle B=30°$ ＆ 弧度為所對圓周角的 2 倍，可得$\overset{\frown}{CE}=60°$；

(2) 利用$\overset{\frown}{CE}=60°$ ＆ 弦切角等於所對弧度的一半，可得$\angle ACE=30°$；

(3) 利用已知$\overset{\frown}{EB}=150°$、$\overset{\frown}{CE}=60°$ ＆ 圓周為 360°，可得$\overset{\frown}{BC}=150°$；

(4) 利用$\overset{\frown}{BC}=150°$ ＆ 弦切角等於所對弧度的一半，可得$\angle BCD=75°$

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{CE}=2\angle B=2\times30°=60°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 ＆ 已知$\angle B=30°$
(2) $\angle ACE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半
(3) $\angle ACE=\frac{1}{2}\times60°=30°$	將(1) $\overset{\frown}{CE}=60°$代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=360°$	如圖 7.3-76 所示，$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=$圓周
(5) $\overset{\frown}{BC}+60°+150°=360°$	將(1) $\overset{\frown}{CE}=60°$ ＆ 已知$\overset{\frown}{EB}=150°$ 代入(4)式得

(6) $\overset{\frown}{BC}=360°-60°-150°=150°$	由(5)式移項得
(7) $\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半
(8) $\angle BCD=\frac{1}{2}\times150°=75°$	將(6) $\overset{\frown}{BC}=150°$ 代入(7)式得

習題 7.3-15：

如圖 7.3-77，$\overline{AC}$是圓 O 的弦，$\overline{BE}$切圓 O 於 A 點。若∠CAB＝40°，則：
(1) ∠COA＝________ 度。　　　　(2) ∠CDA＝________度。

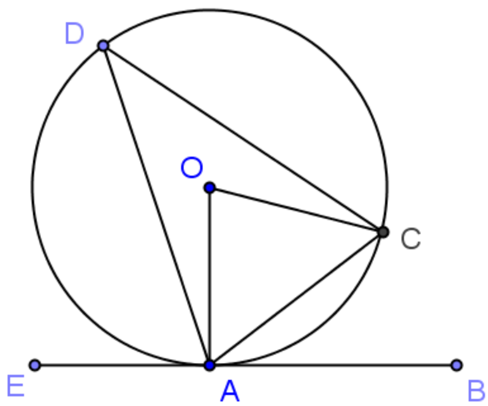


圖 7.3-77

想法：(1) 利用已知∠CAB＝40° & 弦與切線所夾的弧度等於弦切角的 2 倍，可得知$\overset{\frown}{AC}=80°$；

(2) 利用$\overset{\frown}{AC}=80°$ & 圓心角等於所對的弧度，可得知∠COA＝80°；

(3) 利用$\overset{\frown}{AC}=80°$ & 圓周角等於所對弧度的一半，可得知∠CDA＝40°

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AC}=2\angle CAB=2\times40°=80°$	已知∠CAB＝40° & 弦與切線所夾的弧度等於弦切角的 2 倍
(2) $\angle COA=\overset{\frown}{AC}=80°$	圓心角等於所對的弧度 & (1) $\overset{\frown}{AC}=80°$
(3) $\angle CDA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times80°=40°$	圓周角等於所對弧度的一半 & (1) $\overset{\frown}{AC}=80°$

習題 7.3-16：

如圖 7.3-78，圓 P 與圓 Q 外切於 A 點，直線 L 為兩圓的外公切線，與圓 P、圓 Q 的切點分別為 B 點、C 點。已知 $\overset{\frown}{AB}=68°$，$\overset{\frown}{AC}=112°$，則 $\angle BAC=$ ______度。

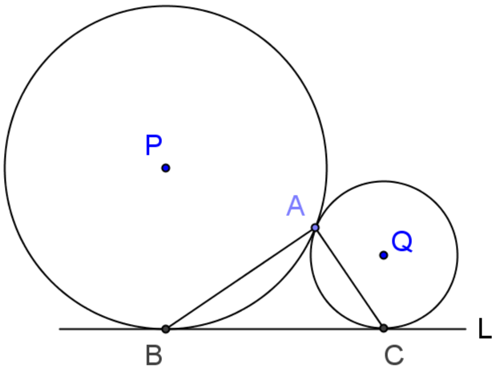


圖 7.3-78

想法：(1) 利用已知 $\overset{\frown}{AB}=68°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得知 $\angle ABC=34°$；

(2) 利用已知 $\overset{\frown}{AC}=112°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得知 $\angle ACB=56°$；

(3) 利用 $\angle ABC=34°$、$\angle ACB=56°$ & $\triangle ABC$ 內角和 180°，可得知 $\angle BAC=90°$

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 68°=34°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知 $\overset{\frown}{AB}=68°$
(2) $\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times 112°=56°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知 $\overset{\frown}{AC}=112°$
(3) $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$	如圖 7.3-78 所示，三角形內角和 180°
(4) $34°+56°+\angle BAC=180°$	將(1) $\angle ABC=34°$ & (2) $\angle ACB=56°$ 代入(3)式得
(5) $\angle BAC=180°-34°-56°=90°$	由(4)式移項得

習題 7.3-17：

如圖 7.3-79，$\overline{AC}$與圓 O 相切於 B 點，且$\overline{AE}$與圓 O 相交於 D、E 兩點。已知$\overset{\frown}{BD}=90°$，$\overset{\frown}{BE}=140°$，則$\angle A=$______度。

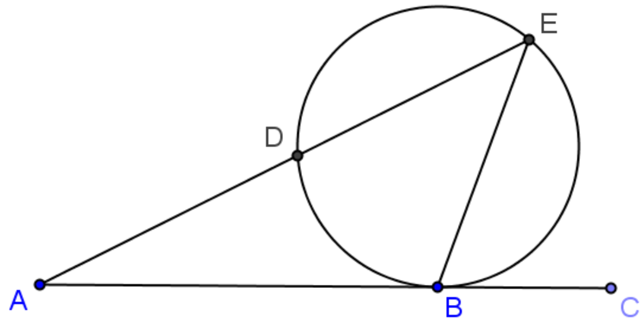


圖 7.3-79

想法：(1) 利用已知$\overset{\frown}{BD}=90°$ & 圓周角等於所對弧度的一半，可得知$\angle E=45°$；

(2) 利用已知$\overset{\frown}{BE}=140°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得知$\angle EBC=70°$；

(3) 利用$\angle E=45°$、$\angle EBC=70°$ & 三角形外角定理，可得知$\angle A=25°$

解：

敘述	理由
(1) $\angle E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}\times 90°=45°$	圓周角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{BD}=90°$
(2) $\angle EBC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}=\frac{1}{2}\times 140°=70°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{BE}=140°$
(3) $\triangle ABE$ 中，$\angle EBC$ 為$\angle EBA$ 的外角 $\angle EBC=\angle A+\angle E$	如圖 7.3-79 所示，外角等於內對角的和
(4) $70°=\angle A+45°$	將(2) $\angle EBC=70°$、(1) $\angle E=45°$ 代入(3)式得
(5) $\angle A=70°-45°=25°$	由(4)式移項得

習題 7.3-18：

如圖 7.3-80，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{CB}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=110°$，$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=40°$，則∠P=______度。

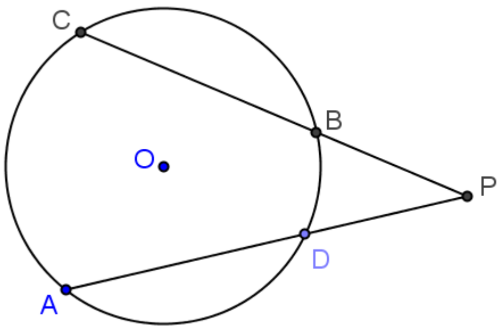


圖 7.3-80

想法：兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠P 為圓外角	已知兩弦$\overline{AD}$與$\overline{CB}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\mathrm{AC}}-\overset{\frown}{\mathrm{BD}})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\angle P=\frac{1}{2}(110°-40°)=35°$	將已知$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=110°$、$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=40°$ 代入(2)式得

習題 7.3-19：

如圖 7.3-81，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=105°$，$\angle P=25°$，則$\overset{\frown}{BD}=$______度。

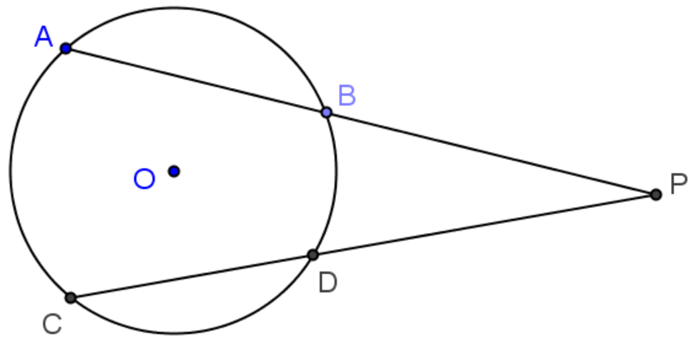


圖 7.3-81

想法：兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $25°=\frac{1}{2}(105°-\overset{\frown}{BD})$	將已知$\angle P=25°$、$\overset{\frown}{AC}=105°$ 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BD}=105°-2\times25°=55°$	由(3)式解一元一次方程式

習題 7.3-20：

如圖 7.3-82，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=102°$，$\overset{\frown}{BD}=50°$，則：

(1)∠P＝______度。　(2) ∠AQC＝______度。

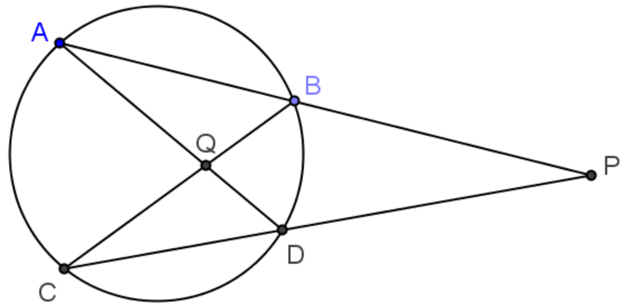


圖 7.3-82

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠P 為圓外角	已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\angle P=\frac{1}{2}(102°-50°)=26°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=102°$、$\overset{\frown}{BD}=50°$代入(2)式得
(4) ∠AQC 為圓內角	已知兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點
(5) $\angle AQC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(4) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(6) $\angle AQC=\frac{1}{2}(102°+50°)$ $=76°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=102°$、$\overset{\frown}{BD}=50°$代入(5)式得

習題 7.3-21：

如圖 7.3-83，若 $\overset{\frown}{AC}=110°$，$\angle P=33°$，則：

(1) $\overset{\frown}{BD}=$______度。　　　(2) $\angle AQC=$______度。

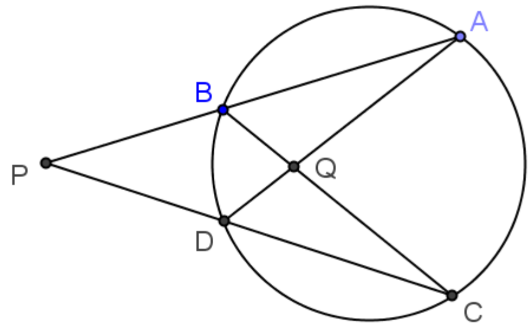


圖 7.3-83

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	如圖 7.3-83，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) ＆兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $33°=\frac{1}{2}(110°-\overset{\frown}{BD})$	將已知$\angle P=33°$、$\overset{\frown}{AC}=110°$ 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BD}=110°-2\times33°=44°$	由(3)式解一元一次方程式
(5) $\angle AQC$ 為圓內角	如圖 7.3-83，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點
(6) $\angle AQC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(5) ＆ 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(7) $\angle AQC=\frac{1}{2}(110°+44°)$ $=77°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=110°$ ＆(4) $\overset{\frown}{BD}=44°$代入(5)式得

習題 7.3-22：

如圖 7.3-84，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於 P 點，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 M 點。

若 $\overset{\frown}{BD}=25°$，$\angle AMC=65°$，則：

(1) $\overset{\frown}{AC}=$______度。　　　(2)$\angle P=$______度。

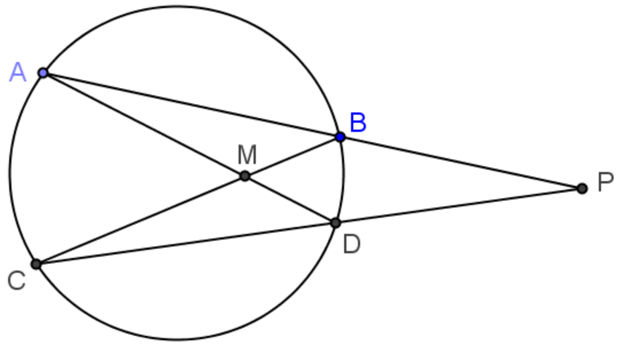


圖 7.3-84

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle AMC$ 為圓內角	已知$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 M 點
(2) $\angle AMC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(3) $65°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+25°)$	將已知$\angle AMC=65°$ & $\overset{\frown}{BD}=25°$ 代入(2)
(4) $\overset{\frown}{AC}=2\times65°-25°=105°$	由(3)式解一元一次方程式
(5) $\angle P$ 為圓外角	已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(6) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(5) &兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(7) $\angle P=\frac{1}{2}(105°-25°)=40°$	將(4) $\overset{\frown}{AC}=105°$ & 已知$\overset{\frown}{BD}=25°$ 代入(6)

習題 7.3-23：

如圖 7.3-85，若$\angle$AFB＝65°，$\angle$E＝25°，求 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$ 的度數。

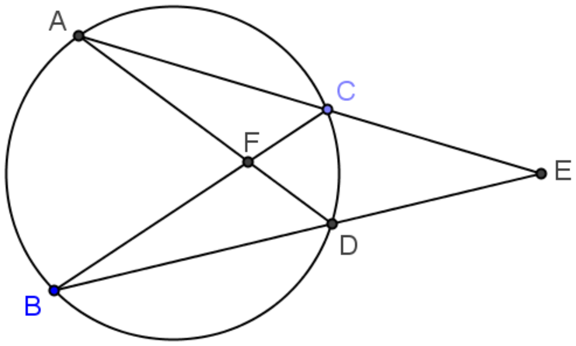


圖 7.3-85

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle$AFB 為圓內角	如圖 7.3-85，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 F 點
(2) $\angle AFB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$	由(1) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(3) $65°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$	將已知$\angle$AFB＝65° 代入(2)式得
(4) $\angle$E 為圓外角	如圖 7.3-85，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的延長線相交於圓外一點 E
(5) $\angle E=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$	由(4) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(6) $25°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$	將已知$\angle$E＝25° 代入(5)式得
(7) 所以$\overset{\frown}{AB}$＝90° & $\overset{\frown}{CD}$＝40°	由(3) & (6) 解二元一次聯立方程式得

習題 7.3-24：

如圖 7.3-68，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。若$\overset{\frown}{ACB}$＝150°，求∠P 的度數。

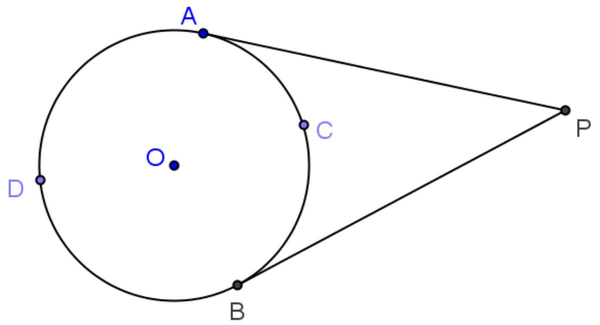


圖 7.3-68

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	如圖 7.3-68 所示，$\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$ $=360°-150°=210°$	由(1)式移項 ＆ 已知$\overset{\frown}{ACB}=150°$
(3) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(4) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(3) ＆ 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(5) $\angle P=\frac{1}{2}(210°-150°)=30°$	將(2) $\overset{\frown}{ADB}=210°$ ＆ 已知$\overset{\frown}{ACB}=150°$代入(4)式得

習題 7.3-25：

如圖 7.3-87，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點，

且∠PAB＝65°，則∠P＝____度。

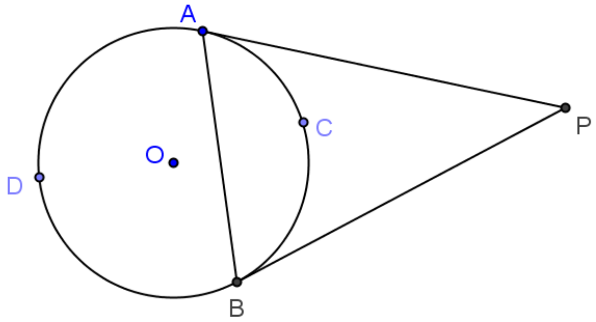


圖 7.3-87

想法：(1) 弧的度數為所對弦切角的 2 倍

(2) 圓周為 360°

(3) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}=2\angle PAB=2\times 65°=130°$	弧的度數為所對弦切角的 2 倍 & 已知∠PAB＝65°
(2) $\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	如圖 7.3-87 所示，$\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(3) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$ $=360°-130°=230°$	由(2)式移項 & (1) $\overset{\frown}{ACB}=130°$
(4) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(5) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(4) & 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(6) $\angle P=\frac{1}{2}(230°-130°)=50°$	將(3) $\overset{\frown}{ADB}=230°$ & (1) $\overset{\frown}{ACB}=130°$ 代入(5)式得

習題 7.3-26：

如圖 7.3-88，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。若∠P＝35°，則∠PAB＝______度。

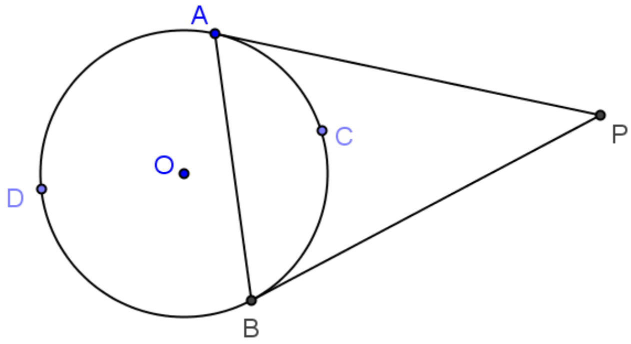


圖 7.3-88

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

(3) 弦切角等於所對弧度的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	如圖 7.3-88 所示，$\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$	由(1)式移項
(3) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(4) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(3) ＆ 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(5) $35°=\frac{1}{2}(360°-\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ACB})$	將已知∠P＝35° ＆ (2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$ 代入(4)式得
(6) $\overset{\frown}{ACB}=(360°-2\times35°)\div2=145°$	由(5)式解一元一次方程式
(7) $\angle PAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}=\frac{1}{2}\times145°$ $=72.5°$	弦切角等於所對弧度的一半 ＆ (6) $\overset{\frown}{ACB}=145°$

習題 7.3-27：

如圖 7.3-89，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知$\overset{\frown}{AB}$＝175°，$\overset{\frown}{AC}$＝65°，則∠P＝______度。

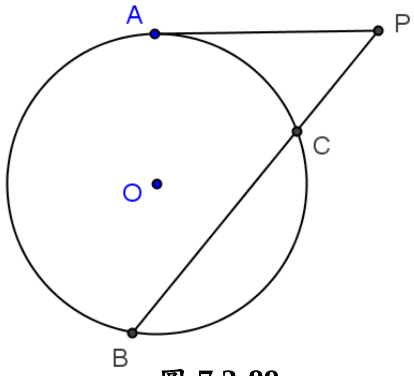


圖 7.3-89

想法：一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠P 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC})$ $=\frac{1}{2}(175°-65°)$ $=55°$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半 & 已知$\overset{\frown}{AB}$＝175°、$\overset{\frown}{AC}$＝65°

習題 7.3-28：

如圖 7.3-90，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知∠P＝50°，$\overset{\frown}{AC}$＝75°，則$\overset{\frown}{AB}$＝______度。

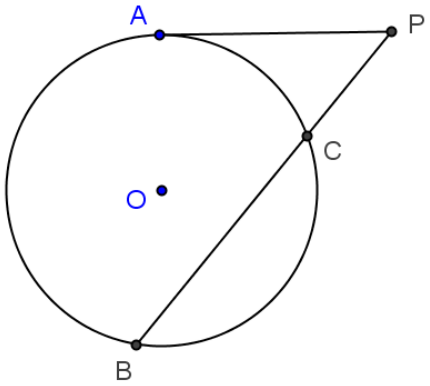


圖 7.3-90

想法：一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠P 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC})$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $50°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-75°)$	將已知∠P＝50° & $\overset{\frown}{AC}$＝75° 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{AB}=2\times50°+75°=175°$	由(3)式解一元一次方程式

習題 7.3-29：

如圖 7.3-91，已知$\overline{PA}$切圓 O 於 P 點，$\overline{CB}$為直徑，且$\overline{CB}$的延長線交$\overline{PA}$於 A 點。若∠A＝45°，則∠APB＝______度。

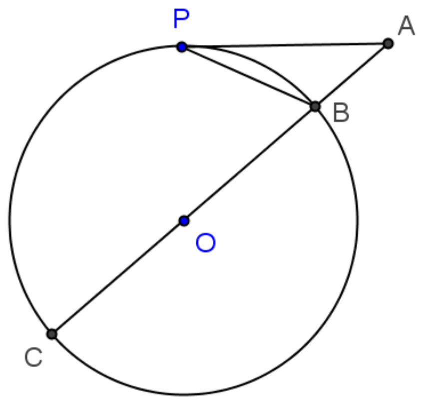


圖 7.3-91

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 直徑將圓周平分

(3) 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 P 點，$\overline{CB}$的延長線交$\overline{PA}$於 A 點
(2) $\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PC}-\overset{\frown}{PB})$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\overset{\frown}{PC}+\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{CPB}=180°$	已知$\overline{CB}$為直徑 & 直徑將圓周平分
(4) $\overset{\frown}{PC}=180°-\overset{\frown}{PB}$	由(3)式移項得
(5) $45°=\frac{1}{2}(180°-\overset{\frown}{PB}-\overset{\frown}{PB})$	將已知∠A＝45° & (4) $\overset{\frown}{PC}=180°-\overset{\frown}{PB}$ 代入(2)式得
(6) $\overset{\frown}{PB}=(180°-2\times45°)\div2=45°$	由(5)式解一元一次方程式
(7) $\angle APB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PB}=\frac{1}{2}\times45°=22.5°$	弦切角為所對弧度的一半 & (6) $\overset{\frown}{PB}=45°$

習題 7.3-30：

如圖 7.3-92，已知 L ∥ M，且$\overset{\frown}{AC}$＝80°，則$\overset{\frown}{BD}$＝？

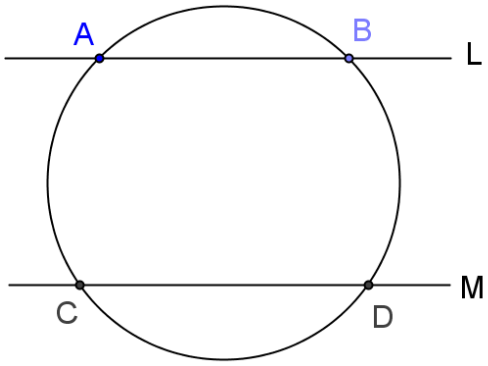


圖 7.3-92

想法：平行線在圓周上截取兩相等的弧

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=80°$	已知 L ∥ M ＆ 平行線在圓周上截取兩相等的弧 ＆ 已知$\overset{\frown}{AC}$＝80°

習題 7.4

習題 7.4-1：

如圖 7.4-13，ABCD 為圓 O 的內接四邊形。若 ∠C＝70°，∠D＝100°，則 ∠A 與∠B 的度數各為何？

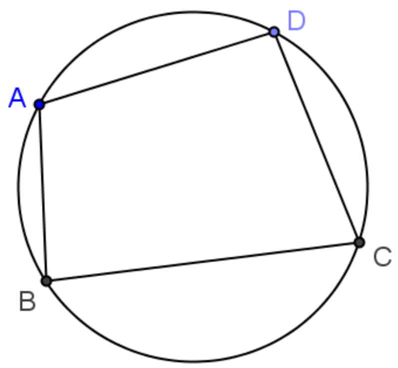


圖 7.4-13

想法：圓的內接四邊形的對角互為補角

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠C＝180°	已知 ABCD 為圓 O 的內接四邊形 ＆ 圓的內接四邊形的對角互為補角
(2) ∠A＝180°－∠C＝180°－70°＝110°	由(1)式移項 ＆ 已知∠C＝70°
(3) ∠B＋∠D＝180°	已知 ABCD 為圓 O 的內接四邊形 ＆ 圓的內接四邊形的對角互為補角
(4) ∠B＝180°－∠D＝180°－100°＝80°	由(3)式移項 ＆ 已知∠D＝100°

習題 7.4-2：

如圖 7.4-14，若∠B＝75°、∠D＝105°，是否可以找到一個圓通過四邊形 ABCD 的四個頂點？為什麼？

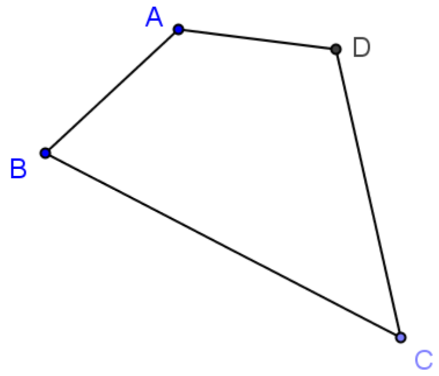
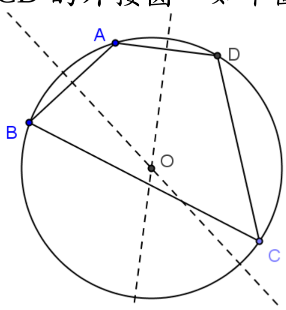


圖 7.4-14

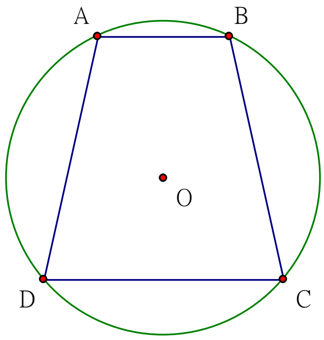
想法：若四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形

解：

敘述	理由
(1) ∠B＋∠D＝180°	已知∠B＝75°、∠D＝105°
(2) ∠B 與∠D 互補	由(1) ＆ 補角定義
(3) 四邊形 ABCD 為圓內接四邊形	由(2) ＆ 四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形
(4) 尺規作圖，以$\overline{AB}$、$\overline{AD}$中垂線的交點 O 為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓，圓 O 即為四邊形 ABCD 的外接圓，如下圖所示 	利用中垂線上任一點到線段兩端等距離 ＆ 同圓半徑相等的性質，可得知 O 點為圓心

習題 7.4-3：

證明圓的內接梯形必為等腰梯形。



已知：四邊形 ABCD 為梯形，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$，且 ABCD 為圓 O 的內接四邊形

求證：ABCD 為等腰梯形

想法：(1) 兩平行線間同側內角互補

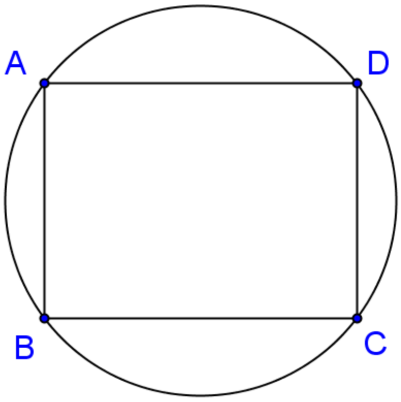
(2) 圓的內接四邊形的對角互為補角

證明：

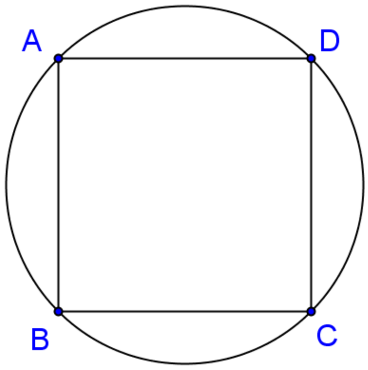
敘述	理由
(1) $\angle A+\angle D=180°$	已知四邊形 ABCD 為梯形，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ & 兩平行線間同側內角互補
(2) $\angle A+\angle C=180°$	已知 ABCD 為圓 O 的內接四邊形 & 圓的內接四邊形的對角互為補角
(3) $\angle A+\angle D=\angle A+\angle C$	由(1) & (2) 遞移律
(4) $\angle D=\angle C$	由(3) 等式兩邊同減$\angle A$
(5) 所以 ABCD 為等腰梯形	已知 ABCD 為梯形，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ & 由(4) $\angle D=\angle C$ 已證

習題 7.4-4：

證明圓的內接平行四邊形必為矩形或正方形。



圖(a)



圖(b)

已知：四邊形 ABCD 為平行四邊形，且 ABCD 為圓的內接四邊形

求證：ABCD 為矩形或正方形

想法：本題分為兩種情況討論：

情況一：若平行四邊形兩鄰邊不相等

情況二：若平行四邊形兩鄰邊相等

再利用 (1) 平行四邊形兩組對邊平行

(2) 兩平行線間同側內角互補

(3) 平行四邊形兩組對邊相等

(4) 圓的內接四邊形的對角互為補角 來證明

情況一：若平行四邊形兩鄰邊不相等，$\overline{AB}\neq\overline{AD}$，如上圖(a)所示

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ & $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊平行
(2) $\angle A+\angle D=180°$	由(1) $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ & 兩平行線間同側內角互補
(3) $\angle A+\angle B=180°$	由(1) $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ & 兩平行線間同側內角互補
(4) $\angle A+\angle D=\angle A+\angle B$	由(2) & (3) 遞移律
(5) $\angle D=\angle B$	由(4) 等式兩邊同減$\angle A$
(6) $\angle D+\angle B=180°$	已知 ABCD 為圓的內接四邊形 & 圓的內接四邊形的對角互為補角

(7) $\angle B + \angle B = 180°$	將(5) $\angle D = \angle B$ 代入 (6) $\angle D + \angle B = 180°$
(8) $\angle B = 180° \div 2 = 90°$	由(7) 解一元一次方程式
(9) $\angle D = \angle B = 90°$	由(5) ＆ (8) 遞移律
(10) $\angle A = 180° - \angle D = 90°$	由(2) 移項 ＆ (9) $\angle D = 90°$ 已證
(11) $\angle C + \angle B = 180°$	由(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ＆ 兩平行線間同側內角互補
(12) $\angle C = 180° - \angle B = 90°$	由(11) 移項 ＆ (8) $\angle B = 90°$ 已證
(13) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$	由(8)、(9)、(10) ＆ (12) 已證
(14) 所以 ABCD 為矩形	已知 ABCD 為平行四邊形 ＆ (13) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ 已證 四個角都為直角的平行四邊行為矩形

情況二：若平行四邊形兩鄰邊相等$\overline{AB} = \overline{AD}$，如上圖(b)所示

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ＆ $\overline{AD} = \overline{BC}$	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形 ＆ 平行四邊形兩組對邊相等
(2) $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC}$	已知$\overline{AB} = \overline{AD}$ ＆ (1) 遞移律
(3) ABCD 為矩形	由情況一證得
(4) 所以 ABCD 為正方形	由(3) ＆ (2) 四邊等長的矩形為正方形

因此，由情況一與情況二可證得 ABCD 為矩形或正方形。

習題 7.4-5：

如圖 7.4-15，已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。若$\overline{AB}$＝22 公分，$\overline{CD}$＝20 公分，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$ 之值。

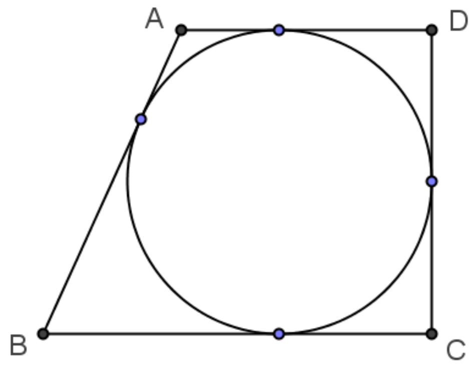


圖 7.4-15

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形	已知四邊形ABCD的四邊分別與圓相切
(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) ＆ 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$	題目所求
$=(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{BC}+\overline{AD})$	加法交換律 ＆ 結合律
$=(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{AB}+\overline{CD})$	將(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$ 代入
$=2(\overline{AB}+\overline{CD})$	加法
＝2×(22 公分＋20 公分)＝84 公分	將已知$\overline{AB}$＝22 公分，$\overline{CD}$＝20 公分代入得
(4) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$＝84 公分	由(3)

習題 7.4-6：

如圖 7.4-16，已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。

若$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=60$ 公分，則$\overline{AB}+\overline{CD}=$______公分。

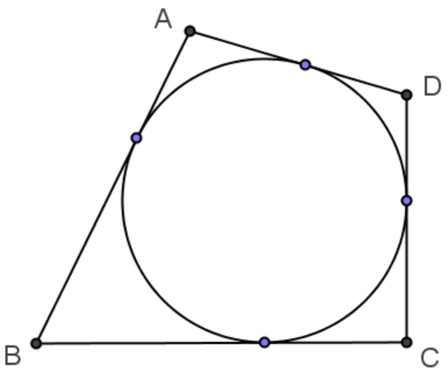


圖 7.4-16

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形	已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切
(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) & 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=60$ 公分	已知
(4) $(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{BC}+\overline{AD})=60$ 公分	由(3) & 加法交換律 & 結合律
(5) $(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{AB}+\overline{CD})=60$ 公分	將(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$ 代入(4)式得
(6) $2(\overline{AB}+\overline{CD})=60$ 公分	由(5) 加法
(7) $\overline{AB}+\overline{CD}=(60$ 公分$)\div 2=30$ 公分	由(6)等式兩邊同除以 2 得

習題 7.4-7：

圖 7.4-17 中的圓為四邊形 ABCD 的內切圓。若 $\overline{AB}$＝x，$\overline{BC}$＝y，$\overline{CD}$＝x＋6，$\overline{DA}$＝y－2，2y＝3 x，求$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$之值。

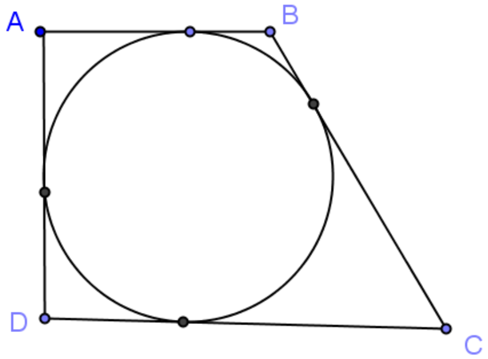


圖 7.4-17

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABDC 為圓的外切四邊形	已知圖中的圓為四邊形 ABCD 的內切圓
(2) $\overline{BC}+\overline{DA}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) ＆ 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) y＋y－2＝x＋x＋6	將已知$\overline{BC}$＝y、 $\overline{DA}$＝y－2、$\overline{AB}$＝x、$\overline{CD}$＝x＋6 代入(2)式得
(4) 2 y－2＝2x＋6	由(3)式化簡得
(5) 3 x－2＝2x＋6	將已知 2y＝3 x 代入(4)式得
(6) x＝8	由(5)式解一元一次方程式
(7) y＝12	將(6)式 x＝8 代入已知 2y＝3 x 求 y
(8) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ ＝x＋y＋x＋6＋y－2 ＝2x＋2y＋4 ＝2x8＋2x12＋4＝44	題目所求 將已知$\overline{AB}$＝x、 $\overline{BC}$＝y、$\overline{CD}$＝x＋6、$\overline{DA}$＝y－2 代入 將(6) x＝8 ＆ (7) y＝12 代入
(9) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$＝44	由(8)