目錄

第五章 幾何作圖

幾何作圖，傳統上我們只能用(1)直尺、(2)圓規兩種工具，本章我們將介紹如何利用尺規兩種繪圖工具來作各種幾何圖形。

圖 5.1　直尺

圖 5.2　圓規

5.1 節　平分作圖

5.1-1 線段中點作圖

圖 5.1-1 中，有一線段$\overline{AB}$，我們要做$\overline{AB}$的中點 C，使$\overline{AC}=\overline{BC}$。

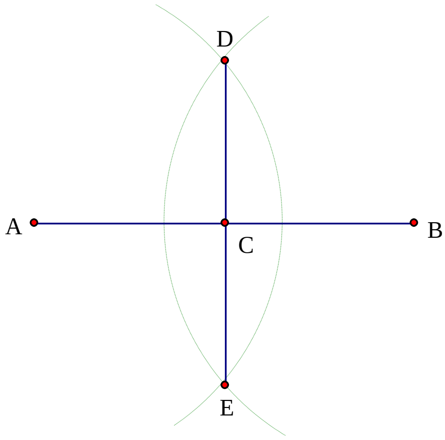


圖 5.1-1

作法：

(1) 以 A 為圓心，以 r 為半徑(大於$\frac{1}{2}\overline{AB}$的任意長)，作一弧。

(2) 以 B 為圓心，以 r 為半徑，作一弧。

(3) 兩弧相交於 D 和 E。

(4) 連接 D、E。

(5) $\overline{DE}$和$\overline{AB}$交於 C，C 即為$\overline{AB}$之中點。

證明 C 為$\overline{AB}$的中點，並不困難，如圖 5.1-2 所示，我們知道△ABD 為等腰三角形，如果我們能證明$\overline{DC}$為∠ADB 的角平分線，利用等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊的性質，我們就可以得知$\overline{DC}\perp\overline{AB}$，且$\overline{DC}$為$\overline{AB}$的平分線。

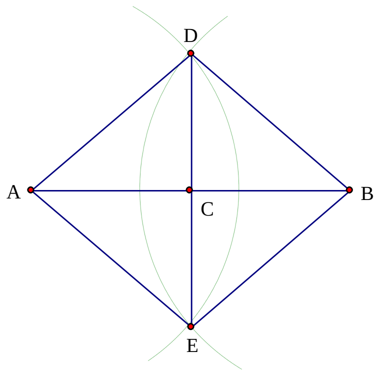


圖 5.1-2

我們不在此證明我們的作法是對的，證明留作習題。

例題 5.1-1：

利用尺規作圖將$\overline{AB}$四等份。

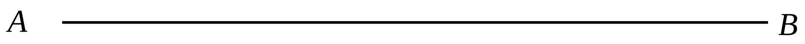


圖 5.1-3

想法：作線段的中點可將線段兩等份，再從兩等份的線段作中點，就可作出四等份的線段。

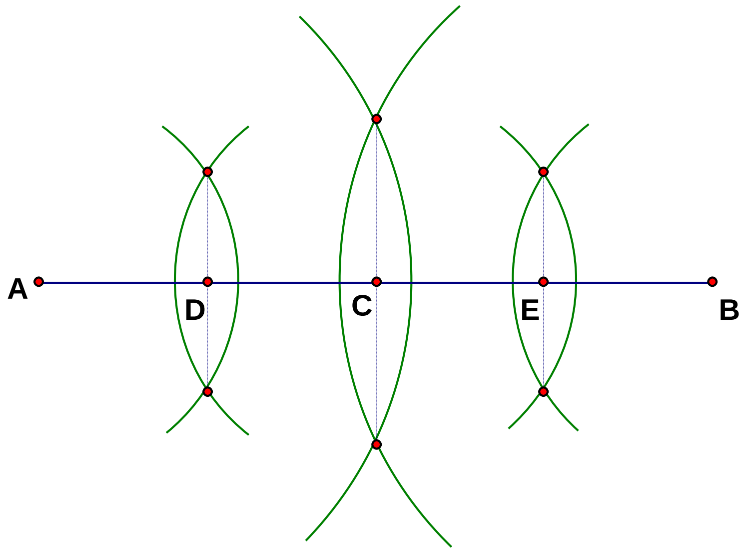


圖 5.1-3(a)

作法：

(1)利用 5.1-1 **線段之中點**的作法，作出$\overline{AB}$的中點 C，如圖 5.1-3(a)。

(2)作出$\overline{AC}$的中點 D。

(3)作出$\overline{CB}$的中點 E。

(4)如圖 5.1-3(a)中，C、D、E 三點將線段$\overline{AB}$分為$\overline{AD}$、$\overline{DC}$、$\overline{CE}$、$\overline{EB}$四等份。

例題 5.1-2：

如圖 5.1-4，利用尺規作圖在$\overline{AB}$上作一點 P，使得 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{3}{5}$ 。

圖 5.1-4

想法：(1) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{3}{5}$，即$\overline{AP}$為 3 份，$\overline{PB}$為 5 份，兩線段和$\overline{AB}$為 8 份，所以只要將$\overline{AB}$線段分成 8 等份，每份為$\overline{AB}$的 8 分之 1，P 點就是距離 A 點 3 份的位置。

(2) 利用 5.1-1 的線段中點作圖可以將線段分成兩等份，

(3) $\because \left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，所以作三次線段中點就可以求得線段的 8 分之 1。

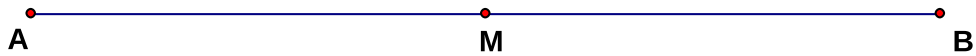


圖 5.1-4(a)

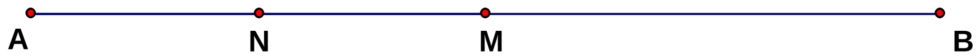


圖 5.1-4(b)

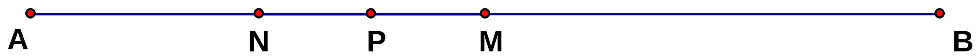


圖 5.1-4(c)

作法：

(1) 作$\overline{AB}$線段的中點 M，則 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ ，$\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ ，如圖 5.1-4(a)。

(2) 作 $\overline{AM}$ 線段的中點 N，則 $\overline{AN}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$ ，$\overline{NM}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$ ，如圖 5.1-4(b)。

(3) 作 $\overline{NM}$ 線段的中點 P，則 $\overline{NP}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$ ，$\overline{PM}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$ ，如圖 5.1-4(c)。

(4) P 點即為所求。

$$\because \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AN}+\overline{NP}}{\overline{PM}+\overline{MB}}=\frac{\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{1}{8}\overline{AB}}{\frac{1}{8}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AB}}=\frac{\frac{3}{8}\overline{AB}}{\frac{5}{8}\overline{AB}}=\frac{3}{5}$$

例題 5.1-3：

如圖 5.1-5，試利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上作一點 P，使得 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{7}$ 。

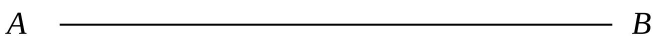


圖 5.1-5

想法：(1) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{7}$，即 $\overline{AP}$ 為 1 份，$\overline{PB}$ 為 7 份，兩線段和 $\overline{AB}$ 為 8 份，所以只要將 $\overline{AB}$ 線段分成 8 等份，每份為 $\overline{AB}$ 的 8 分之 1，P 點就是距離 A 點 1 份的位置。

(2) 利用 5.1-1 的線段中點作圖可以將線段分成兩等份，

(3) $\because\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，所以作三次線段中點就可以求得線段的 8 分之 1。

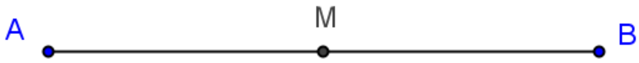


圖 5.1-5(a)

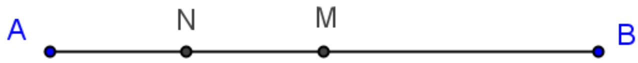


圖 5.1-5(b)

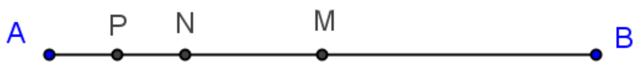


圖 5.1-5(c)

作法：

(1) 作 $\overline{AB}$ 線段的中點 M，則 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，如圖 5.1-5(a)。

(2) 作 $\overline{AM}$ 線段的中點 N，則 $\overline{AN}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，$\overline{NM}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，如圖 5.1-5(b)。

(3) 作 $\overline{AN}$ 線段的中點 P，則 $\overline{AP}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$，$\overline{PN}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$，如圖 5.1-5(c)。

(4) P 點即為所求。

$$\because\ \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PN}+\overline{NM}+\overline{MB}}=\frac{\frac{1}{8}\overline{AB}}{\frac{1}{8}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AB}}=\frac{\frac{1}{8}\overline{AB}}{\frac{7}{8}\overline{AB}}=\frac{1}{7}$$

例題 5.1-4：

利用線段中點作圖，將一已知線段$\overline{AB}$分成$\overline{AC}$及$\overline{CB}$兩線段，則下列何者不可能為$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$的值？

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{2}{6}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{7}{9}$

想法：(1) 線段中點作圖，可將一線段分成兩等份線段，每一線段為原線段的$\dfrac{1}{2}$，共有 2 個；

(2) 若每一$\dfrac{1}{2}$的線段再作一次線段中點作圖，則每一線段為原線段的$\dfrac{1}{4}$，共有 4 個(即 2^2 個)；

(3) 若每一$\dfrac{1}{4}$的線段再作一次線段中點作圖，則每一線段為原線段的$\dfrac{1}{8}$，共有 8 個(即 2^3 個)，所以用線段中點作圖分為等份線段之總個數為 2^n 個。

解答：(C)

敘述	理由
(1) (A) 可以。	$1+3=4=2^2$；分成 4 個等份線段。
(2) (B) 可以	$2+6=8=2^3$；分成 8 個等份線段。
(3) (C) 不可能	$4+3=7\neq 2^n$；無法用線段中點作圖將線段分成 7 個等份線段。
(4) (D) 可以	$7+9=16=2^4$；分成 16 個等份線段。

例題 5.1-5：

若要在 16 單位長的線段上，找出 10 單位長的線段，至少須利用尺規作圖作幾次線段中點作圖？

想法：(1) 假設要在長度為 16 單位的線段$\overline{AB}$上，找出 10 單位長的線段，即是在$\overline{AB}$上找一點 P，使得$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$，即$\overline{AP}$為 5 份(每份為 16 單位長÷8＝2 單位長)，$\overline{PB}$為 3 份(每份為 2 單位長)，兩線段和$\overline{AB}$為 8 份(每份為 2 單位長)，所以只要將$\overline{AB}$線段分成 8 等份(每份為 2 單位長)，每份為$\overline{AB}$的 8 分之 1，P 點就是距離 A 點 5 份的位置。

(2) 利用 5.1-1 的線段中點作圖可以將線段分成兩等份，

(3) $\because \left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，所以作三次線段中點就可以求得線段的 8 分之 1。

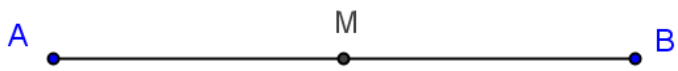


圖 5.1-6(a)

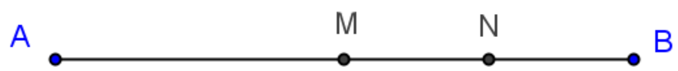


圖 5.1-6(b)

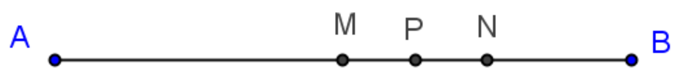


圖 5.1-6(c)

作法：

(1) 作$\overline{AB}$線段的中點 M，則 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，如圖 5.1-6(a)。

(2) 作$\overline{BM}$線段的中點 N，則 $\overline{MN}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，$\overline{NB}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，如圖 5.1-6(b)。

(3) 作$\overline{MN}$線段的中點 P，則 $\overline{MP}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$，$\overline{PN}=\dfrac{1}{8}\overline{AB}$，如圖 5.1-6(c)。

(4) P 點即為所求。

$$\because \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AM}+\overline{MP}}{\overline{PN}+\overline{NB}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{8}\overline{AB}}{\frac{1}{8}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AB}}=\frac{\frac{5}{8}\overline{AB}}{\frac{3}{8}\overline{AB}}=\frac{5}{3}$$

$\therefore$將$\overline{AB}$分成 8 等份(每份為 16 單位長÷8＝2 單位長)，其中$\overline{AP}$占了 5 份(每份為 2 單位長)，即$\overline{AP}$＝5x2 單位長＝10 單位長

所以本題至少需要利用尺規作圖做**三次(作法(1)~(3))**線段中點作圖，即可在 16 單位長的線段上，找出 10 單位長的線段

例題 5.1-6：

如果將一線段平分成 2^n 等份時，須作 15 次的線段中點作圖，則 n＝________。

想法：(1) 線段中點作圖，可將一線段分成兩等份線段，每一線段為原線段的 $\frac{1}{2}$，共有 2 等份；

(2) 若每一 $\frac{1}{2}$ 的線段再作一次線段中點作圖(相當於作了 3 次線段中點作圖)，則每一線段為原線段的 $\frac{1}{4}$，共有 4 等份(即 2^2 等份)；

(3) 若每一 $\frac{1}{4}$ 的線段再作一次線段中點作圖(相當於作了 7 次線段中點作圖)，則每一線段為原線段的 $\frac{1}{8}$，共有 8 等份(即 2^3 等份)，所以用線段中點作圖分為等份線段之總個數為 2^n 等份。

解：

敘述	理由
(1) 線段被平分為 16 等份	已知作 15 次線段中點作圖
(2) 所以 n＝4	由(1) ＆ $16=2^4$

5.1-2　角平分線作圖

圖 5.1-7 中，有一個角∠ABC，我們的任務是要等分∠ABC。

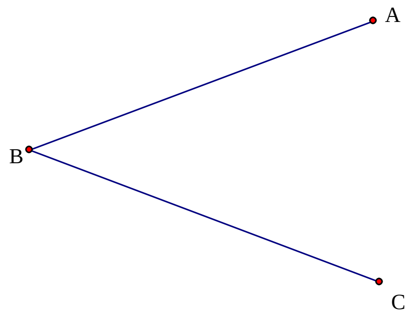


圖 5.1-7

作法一：如圖 5.1-7(a)

(1) 以 B 為圓心，以適當的長度為半徑，作一弧，此弧交$\overline{AB}$與$\overline{BC}$於 D 點及 E 點。

(2) 分別以 D、E 為圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{DE}$為半徑畫弧，兩弧相交於 F 點。

(3) 連$\overline{BF}$，則$\overline{BF}$平分∠ABC。

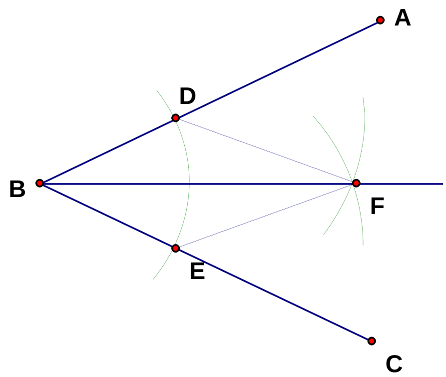


圖 5.1-7(a)

我們需要證明以上等分∠ABC 的作法是正確的，即要證明圖 5.1-7(a)中∠DBF＝∠EBF。我們可以證明△DBF ≅ △EBF，利用全等三角形之對應角相等的性質來證明∠DBF＝∠EBF。

證明：

敘述	理由
(1) 在△DBF 與△EBF 中	如圖 5.1-7(a)所示
$\overline{BD}=\overline{BE}$	同圓半徑相等(作法一之(1))
$\overline{BF}=\overline{BF}$	同線段相等
$\overline{DF}=\overline{EF}$	等長半徑相等(作法一之(2))
(2) △DBF ≅ △EBF	由(1) & 根據 S.S.S.三角形全等定理
(3) ∠DBF＝∠EBF	由(2) & 全等三角形之對應角相等
(4) 所以$\overline{BF}$平分∠ABC	由(3)

Q. E. D.

作法二：如圖 5.1-7(b)

(1) 以 B 為圓心，以適當的長度為半徑，作一弧，此弧交$\overline{AB}$與$\overline{BC}$於 D 點及 E 點。

(2) 連接$\overline{DE}$。

(3) 作$\overline{DE}$的中點 F。

(4) 連$\overline{BF}$，則$\overline{BF}$平分∠ABC。

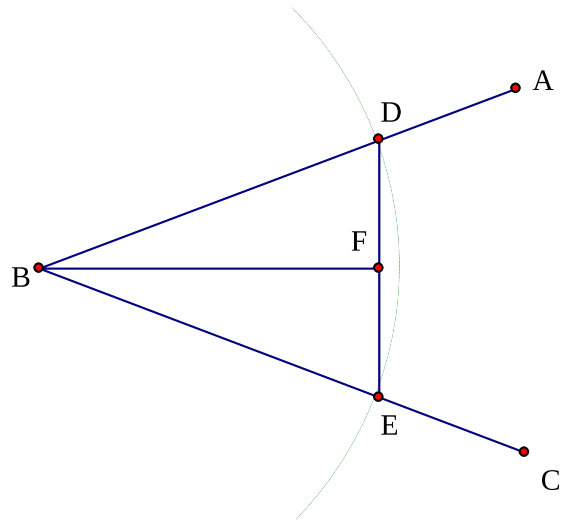


圖 5.1-7(b)

要證明以上的作法是對的，我們不妨注意△BDE 是一等腰三角形，F 為$\overline{DE}$的中點，因此我們可以證明△DBF≅△EBF，而且∠DBF＝∠EBF。

至於如何求$\overline{DE}$的中點？ 我們可以用 5.1-1 的作法。

例題 5.1-7：

如圖 5.1-8 所示，ABCD 為一四邊形，利用尺規作圖，分別作出∠B 與∠C 的角平分線。

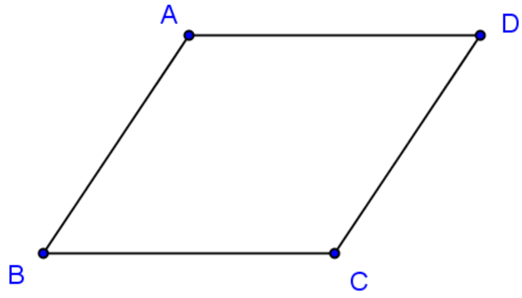


圖 5.1-8

作法：如圖 5.1-8(a)

(1) 以 B 為圓心，以適當的長度為半徑，作一弧，此弧交$\overline{AB}$與$\overline{BC}$於 F 點及 G 點。

(2) 分別以 F、G 為圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{FG}$為半徑畫弧，兩弧相交於 N 點。

(3) 作$\overline{BN}$，則$\overline{BN}$平分∠ABC。

(4) 以 C 為圓心，以適當的長度為半徑，作一弧，此弧交$\overline{BC}$與$\overline{CD}$於 P 點及 Q 點。

(5) 分別以 P、Q 為圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{PQ}$為半徑畫弧，兩弧相交於 R 點。

(6) 作$\overline{CR}$，則$\overline{CR}$平分∠BCD。

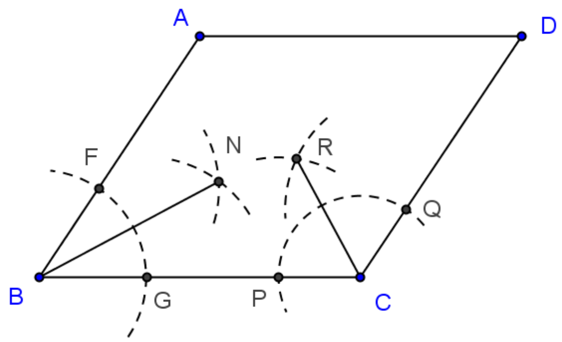


圖 5.1-8(a)

習題 5.1

習題 5.1-1

證明 5.1-1 線段中點的作圖是正確的作法，即圖 5.1-2 的 C 點為$\overline{AB}$之中點。

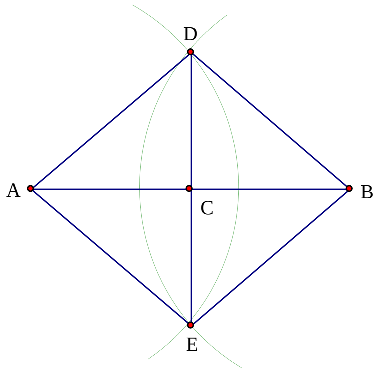


圖 5.1-2

習題 5.1-2

三角形的中線為邊的中點與對角頂點的連線，三邊中線的交點稱為三角形的重心，如圖 5.1-9 中的點 S 為△ABC 的重心，求作三角形的重心。

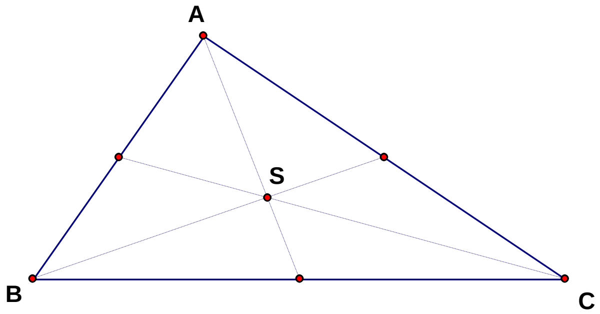


圖 5.1-9

習題 5.1-3

三角形三內角平分線的交點為三角形的內心，如圖 5.1-10 中的點 I 為△ABC 的內心，求作三角形的內心。

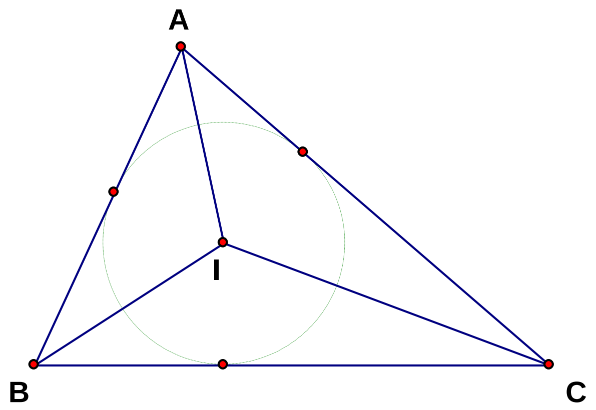


圖 5.1-10

習題 5.1-4

求作一等腰三角形。

習題 5.1-5

如圖 5.1-11，利用尺規作圖，在$\overline{CD}$上畫出一點 E，使$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{ED}}=\dfrac{3}{5}$。

圖 5.1-11

習題 5.1-6

如圖 5.1-12，以尺規作圖分別畫出∠AOC 和∠BOC 的角平分線。

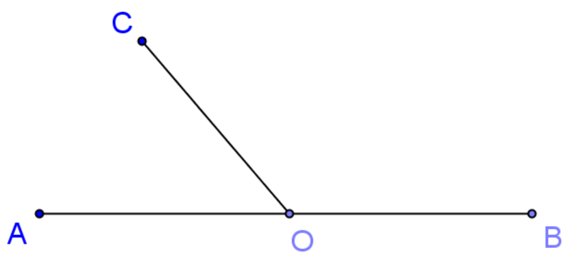


圖 5.1-12

習題 5.1-7

如圖 5.1-13，以尺規作圖將∠D 平分成四等份。

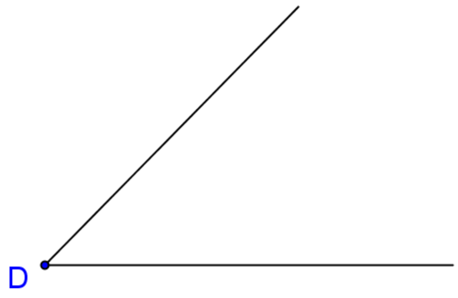


圖 5.1-13

習題 5.1-8

利用角平分線作圖將一個角平分成 8 等份，至少須作__________次角平分線。

習題 5.1-9

利用角平分線作圖，做出一個角的$\frac{3}{16}$，至少須作圖______________次。

5.2 節　垂直線作圖

5.2-1　通過線上一點作一垂直線的作圖

在圖 5.2-1 中，C 為$\overline{AB}$上的一點，我們的任務是過 C 點作一直線垂直$\overline{AB}$。

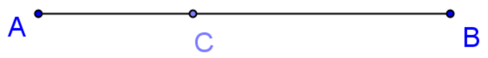


圖 5.2-1

作法：　如圖 5.2-1 (a)

(1) 假設$\overline{CA}$比$\overline{CB}$短。

(2) 以 C 為圓心，$\overline{CA}$為半徑作一弧，與$\overline{AB}$交於 D，使$\overline{CA}=\overline{CD}$。

(3) 以 A 為圓心，以 r 為半徑(大於$\overline{CA}$之長度)作一弧。

(4) 以 D 為圓心，以 r 為半徑作一弧。

(5) 兩弧交於 E 點。

(6) 連接$\overline{EC}$，則$\overline{EC}\perp\overline{AB}$。

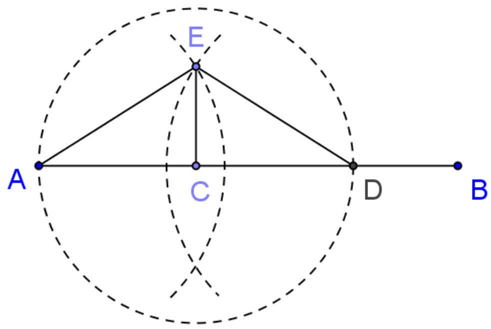


圖 5.2-1(a)

以上的作法為何正確？可以從圖 5.2-1(a)看出，圖 5.2-1(a)中的△AED 為一等腰三角形，而 C 為$\overline{AD}$的中點，所以我們可以很容易證明$\overline{EC}$為∠AED 的角平分線，也可以證明$\overline{EC} \perp \overline{AD}$。

在以上的例子中，點 C 在$\overline{AB}$之上，如果我們需要通過線段的一個端點做$\overline{AB}$的垂直線，只要延長一下$\overline{AB}$，就可以了。如圖 5.2-2 所示。

圖 5.2-2

5.2-2　線外一點垂直線作圖

在圖 5.2-3 中，C 為$\overline{AB}$外之一點，我們要通過 C，作一$\overline{AB}$的垂直線。

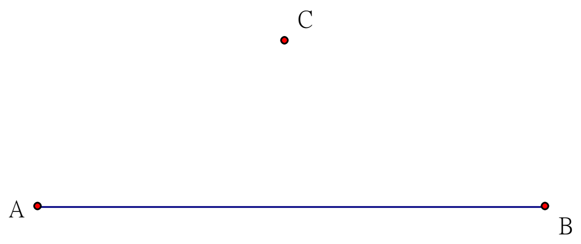


圖 5.2-3

這一作圖的方法，原理是作一等腰三角形，如圖 5.2-3(a)所示，圖中之△A`B`C 為一等腰三角形（$\overline{A'C}=\overline{B'C}$），求$\overline{A'B'}$之中點 D，連接 C 和 D，則$\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

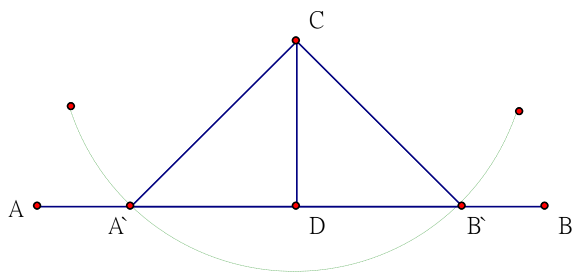


圖 5.2-3(a)

作法一：如圖 5.2-3(a)

(1) 以 C 為圓心，適當的長度為半徑，畫一弧，交$\overline{AB}$於 A'點與 B'點。

(2) 作$\overline{A'B'}$的中點 D。

(3) 連接 C 與 D，則$\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

作法二：

(1) 以 C 為圓心，大於 C 點與$\overline{AB}$的距離的長度為半徑，畫一弧，交$\overline{AB}$於 A`、B`兩點。

(2) 連接 C 點與 A`點；C 點與 B`點。

(3) 作∠A`CB`的角平分線$\overline{CF}$(作法如 5.1-2)，如圖 5.2-3(b)。

(4) $\overline{CF}$交$\overline{AB}$於 D 點，則$\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

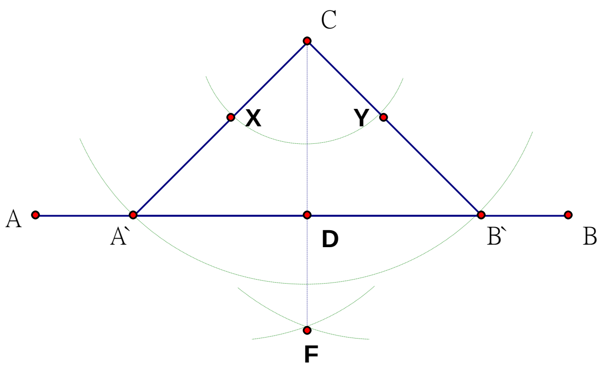


圖 5.2-3(b)

接下來我們要證明上述作法所作得的$\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{CA'}=\overline{CB'}$，△CA`B`為等腰三角形	同圓半徑相等(作法二之(1))
(2) $\overline{CF}$垂直平分$\overline{A'B'}$	$\overline{CF}$為∠A`CB`的角平分線(作法二之(3)) 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(3) 故$\overline{CD}\perp\overline{AB}$	由(3) & $\overline{CF}$交$\overline{AB}$於 D 點(作法二之(4))

Q. E. D.

例題 5.2-1：

如圖 5.2-4，已知直線 L 及 L 上一點 P，以 P 為頂點，L 為一邊，求作 45°角。

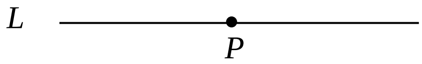


圖 5.2-4

作法：如圖 5.2-4(a)

(1) 過 P 點作垂直 L 的垂直線$\overline{PC}$(利用 5.2-1 的作法)，則∠APC＝90°。

(2) 作∠APC 的角平分線(利用 5.1-2 的作法)，則∠APD＝45°。

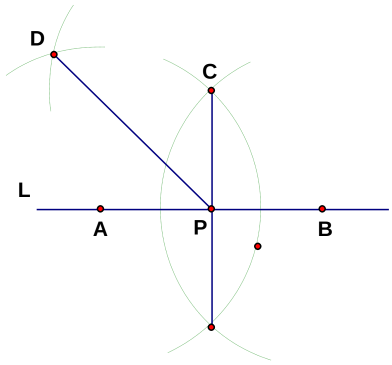


圖 5.2-4(a)

5.2-3　線段的垂直平分線(中垂線)作圖

在圖 5.2-5 中，求作一線段垂直平分$\overline{AB}$。

圖 5.2-5

作法：如圖 5.2-5(a)

(1)　以 A 為圓心，以 r 為半徑(大於$\frac{1}{2}\overline{AB}$的任意長)，作一弧。

(2)　以 B 為圓心，以 r 為半徑，作一弧。

(3)　兩弧相交於 D 和 E。

(4)　連接 D、E，$\overline{DE}$交$\overline{AB}$於 C 點，則$\overline{DE}\perp\overline{AB}$且$\overline{AC}=\overline{BC}$。

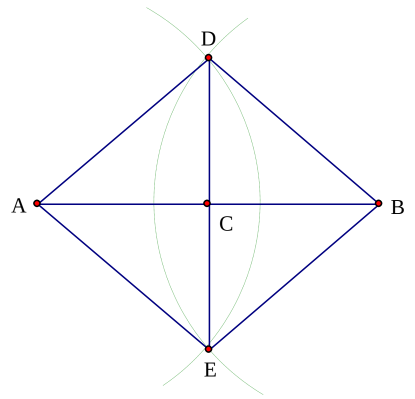


圖 5.2-5(a)

接下來我們要證明上述作法所作得的$\overline{DE}\perp\overline{AB}$且$\overline{AC}=\overline{BC}$。

證明：

敘述	理由
(1) 連接 D、A；D、B；E、A；E、B 如圖 5.2-5(a)	直線作圖
(2) 在△ADE 與△BDE 中 $\overline{AD}=\overline{BD}$ $\overline{AE}=\overline{BE}$ $\overline{DE}=\overline{DE}$	如圖 5.2-5(a)所示 半徑相等(作法之(1)(2)) 半徑相等(作法之(1)(2)) 同線段相等

(3) △ADE ≅ △BDE	由(2) & 根據 S.S.S 三角形全等定理
(4) ∠ADE＝∠BDE	全等三角形之對應角相等
(5) △ADB 為等腰三角形	$\overline{AD}=\overline{BD}$ 半徑相等(作法之(1)(2))
(6) $\overline{DE}$為∠ADB 的角平分線	由(4) ∠ADE＝∠BDE 已證
(7) $\overline{DE}\perp\overline{AB}$且$\overline{AC}=\overline{BC}$	由(5) & (6) 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊定理(定理 3.1-3)

習題 5.2

習題 5.2-1

已知一邊長，求作正方形。

習題 5.2-2

已知長方形的長邊及短邊，求作長方形。

習題 5.2-3

如圖 5.2-6，在△ABC 中，利用尺規作圖，作出$\overline{BC}$上的高$\overline{AH}$。

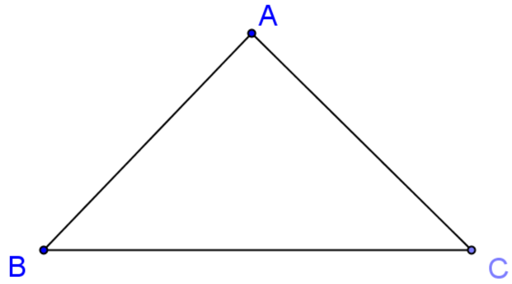


圖 5.2-6

習題 5.2-4

如圖 5.2-7，△ABC 中，∠C 為鈍角，求作$\overline{BC}$邊上的高。

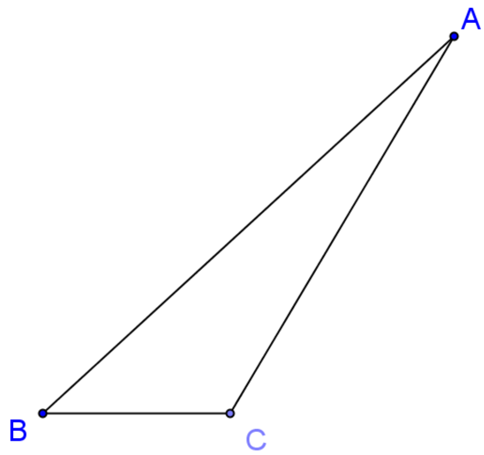


圖 5.2-7

習題 5.2-5

如圖 5.2-8，以尺規在梯形 ABCD 上作圖，則圖上的痕跡是下列哪一種作圖的必要步驟？

(A) 梯形的高

(B) ∠ABC 的角平分線

(C) $\overline{BC}$的中點

(D) $\overline{AB}$的垂直平分線

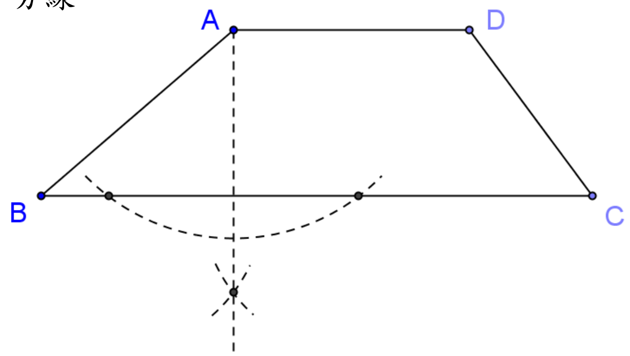


圖 5.2-8

習題 5.2-6

三角形三邊的中垂線之交點稱為三角形的外心，求作圖 5.2-9 中△ABC 的外心點 V。

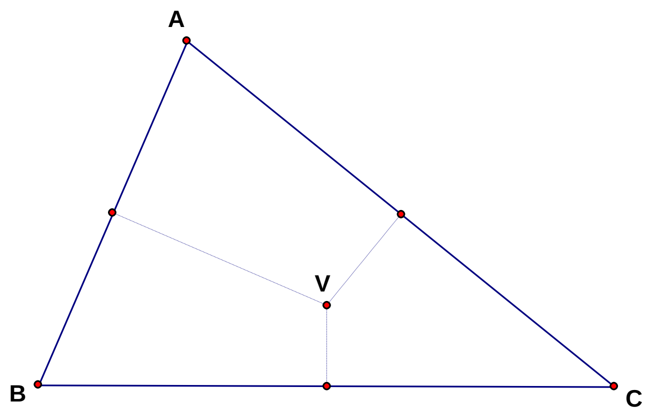


圖 5.2-9

5.3 節　平行線作圖

5.3-1　　過直線外一點作此直線的平行線

圖 5.3-1 中，C 為$\overline{AB}$外之一點，求通過 C 而平行於$\overline{AB}$的直線。

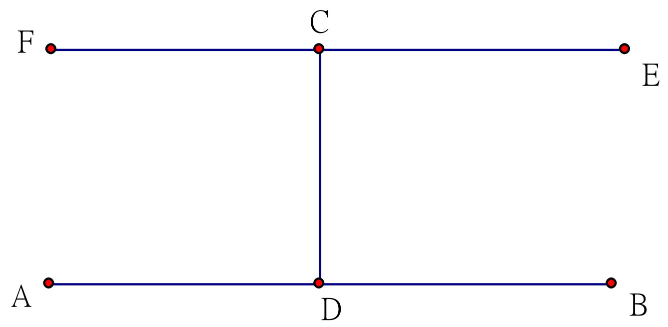


圖 5.3-1

作法：

(1) 通過 C，作一垂直於$\overline{AB}$的直線，與$\overline{AB}$交於 D 點。

(2) 通過 C，作一垂直於$\overline{CD}$的線段$\overline{EF}$，則$\overline{EF}$必定平行於$\overline{AB}$。
　(定理 3.2-1　兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行)

如果我們會作通過線外一點的平行線，我們就可以作一個等角。

例題 5.3-1 等角作圖(一)

圖 5.3-2 中有一角∠ABC，我們要再作一角等於∠ABC。

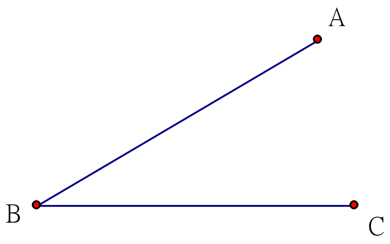


圖 5.3-2

我們的作法很簡單，我們只要在$\overline{AB}$與$\overline{BC}$以外，隨意找一點 E，然後通過 E 點，作兩條平行於$\overline{AB}$及$\overline{BC}$的直線，這兩條直線所交成的∠DEF＝∠ABC。

(如圖 5.3-2(a)所示，$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$，$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$。)

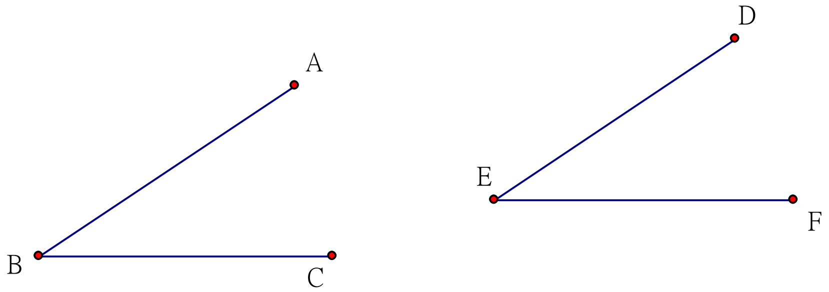


圖 5.3-2(a)

至於這個作法正確性的證明，也很簡單，只要延長$\overline{DE}$，延長後的線和$\overline{BC}$的延長線相交於 G 點，然後利用平行線的同位角相等的性質，就可以證明了，如圖 5.3-2(b)所示。

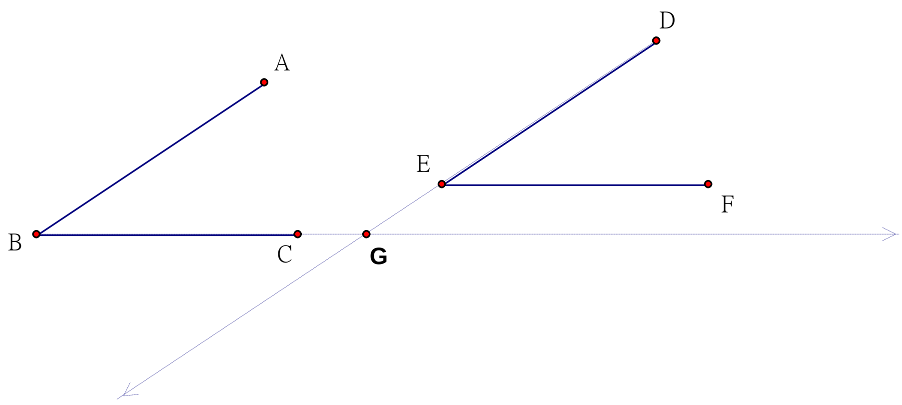


圖 5.3-2(b)

習題 5.3

習題 5.3-1

試利用平行線同位角相等的性質，設計過線外一點之平行線作法。

如圖 5.3-3 所示：

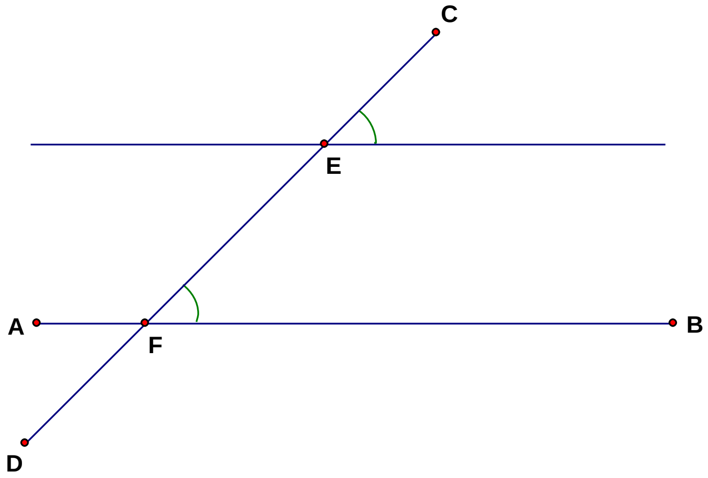


圖 5.3-3

5.4 節　三角形作圖

5.4-1　已知三角形三邊之三角形作圖

圖 5.4-1 中，有 a，b，c 三線段，此三線段為一三角形的三個邊，我們要做出此三角形。

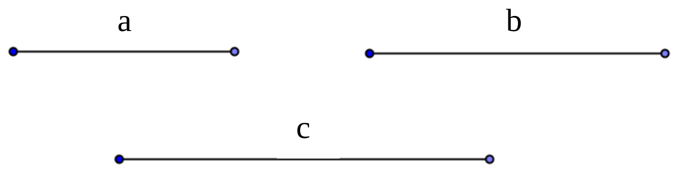


圖 5.4-1

作法：如圖 5.4-1(a)

(1) 在平面上畫一直線 L，並在 L 上任意標示一點 A。

(2) 以 A 點為圓心，長度為 c 為半徑畫弧交 L 於 B 點。

(3) 以 A 為圓心，b 為半徑作一弧。

(4) 以 B 為圓心，a 為半徑作一弧，兩弧相交於 C 點。

(5) 連接$\overline{AC}$，$\overline{BC}$，△ABC 為所求的三角形。

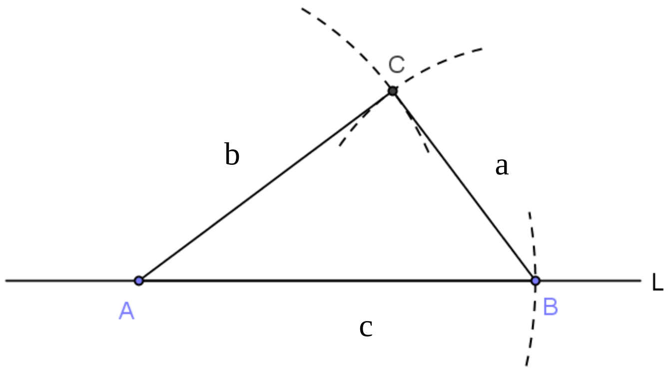


圖 5.4-1(a)

利用以上的作圖方法，我們也可以作一個等角的作圖。

例題 5.4-1 等角作圖(二)

已知一角，求作與此已知角相等的角，也可以利用已知三邊之三角形作圖法，作此角。

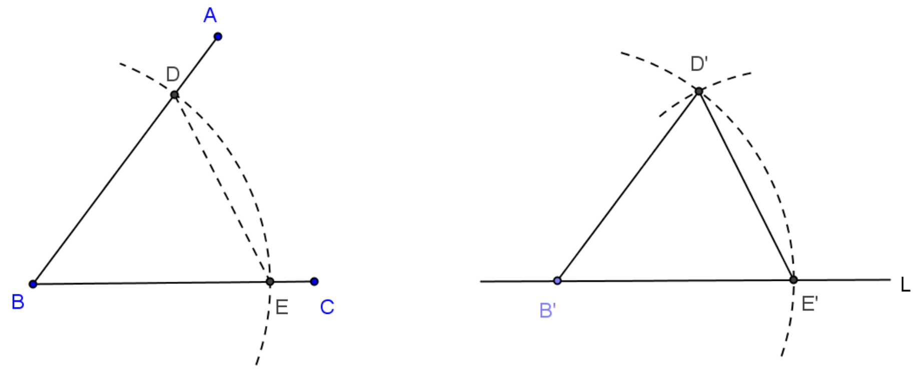


圖 5.4-2

如圖 5.4-2 所示，我們已知∠ABC，現在要做一等於∠ABC 的角，我們的作法是以 B 為圓心，畫一弧，分別交$\overline{AB}$和$\overline{BC}$於 D、E 兩點，連接$\overline{DE}$，就成一△BDE，接下來的作法就是作一和△BDE 全等的三角形△B`D`E`，其中$\overline{B'D'}=\overline{BD}$，$\overline{B'E'}=\overline{BE}$，$\overline{D'E'}=\overline{DE}$，如此一來，我們就能得到∠D`B`E'＝∠DBE＝∠ABC。

作法：如圖 5.4-2

(1) 在平面上畫一直線 L，並在 L 上任意標示一點 B'。

(2) 分別以 B 點與 B'點為圓心，適當長度為半徑畫弧交$\overline{AB}$於 D 點、交$\overline{BC}$於 E 點、交 L 於 E'點。

(3) 以 E'點為圓心，$\overline{DE}$為半徑畫弧，與以 B'點為圓心，適當長度為半徑所畫的弧相交於 D'點。

(4) 連接$\overline{B'D'}$，$\overline{D'E'}$，則△B`D`E` ≅ △BDE。

(5) ∠D`B`E'＝∠DBE＝∠ABC。

其實，我們並不一定要堅持$\overline{BD}=\overline{BE}$。只要做出任何一個三角形就可以了。如圖 5.4-2(a) 中的△BDE 並非是一個等腰三角形，如果作一和△BDE 全等的三角形△B`D`E`，則∠D`B`E’＝∠DBE＝∠ABC。

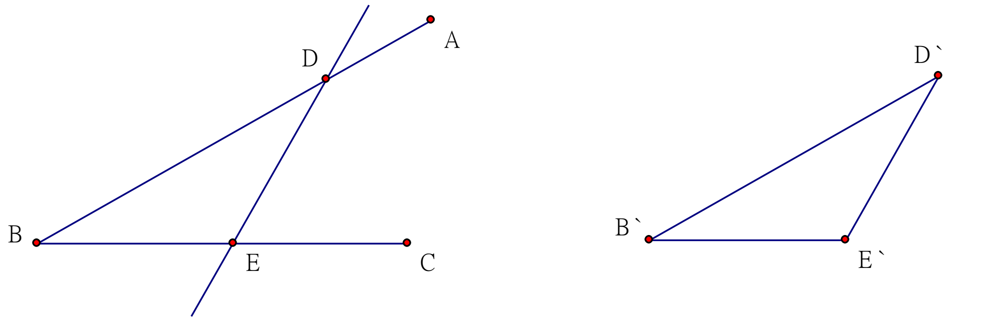


圖 5.4-2(a)

5.4-2　已知兩邊夾一角之三角形作圖

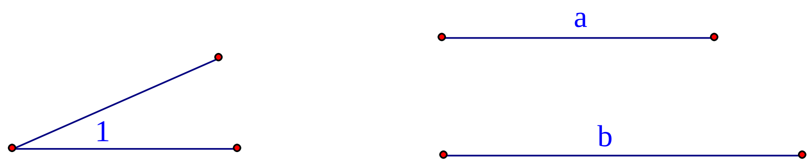


圖 5.4-3

如圖 5.4-3 中，我們已知三角形的一邊長 a，另一邊長 b，此兩邊的夾角為∠1，我們要做此△ABC。

作法：如圖 5.4-3(a)

(1) 在一線段$\overline{BD}$上，以 B 為圓心，b 為半徑，作一圓弧，與$\overline{BD}$交於 C 點，使$\overline{BC}$＝b。

(2) 作∠CBE＝∠1。

(3) 以 B 為圓心，a 為半徑，作一圓弧，與$\overline{BE}$交於 A 點。

(4) 連接$\overline{AC}$，△ABC 即為所求之三角形。

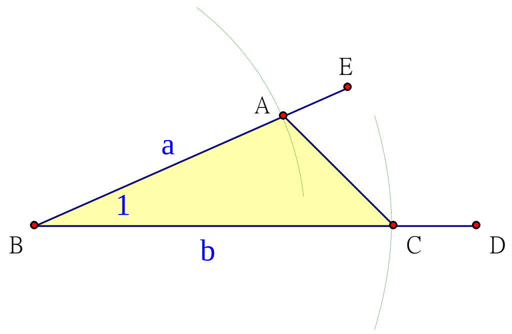


圖 5.4-3(a)

5.4-3　已知一邊及兩夾角之三角形作圖

如圖 5.4-4，已知三角形之一邊長為 a，夾此邊的兩個角∠1 及∠2，求作此△ABC。

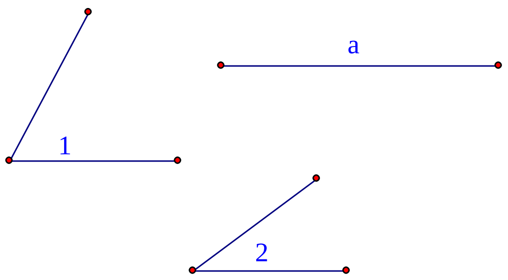


圖 5.4-4

作法：如圖 5.4-4(a)

(1) 取一線段$\overline{AB}$，使其長度等於 a 之長度。

(2) 作一角∠DAB＝∠1。

(3) 作一角∠EBA＝∠2。

(4) 兩角之兩邊$\overline{AD}$與$\overline{BE}$交於 C 點，△ABC 即為所求之三角形。

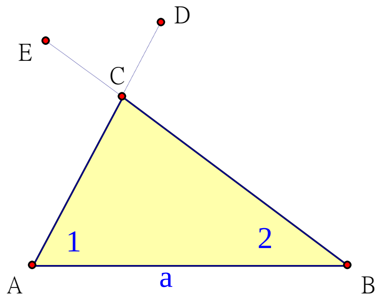


圖 5.4-4(a)

習題 5.4

習題 5.4-1

已知等腰三角形的底角及底邊，求作此等腰三角形。

習題 5.4-2

圖 5.4-5 為直線 L 及線外一點 P，利用內錯角相等的原理，以尺規作圖過 P 點畫一直線，使該直線與 L 平行。

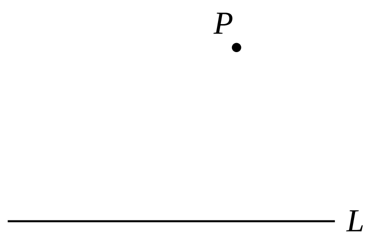


圖 5.4-5

習題 5.4-3

已知直角三角形直角之兩邊長，求作此三角形。

習題 5.4-4

已知等腰三角形兩腰長及其底邊之高，求作此三角形。

習題 5.4-5

已知直角三角形之斜邊及另一邊，求作此三角形。

習題 5.4-6

已知等腰三角形的底角及腰長，求作此等腰三角形。

習題 5.4-7

如圖 5.4-6，在$\overline{AC}$上找一點 D，使得△ABD 為腰長等於$\overline{AB}$的等腰三角形。

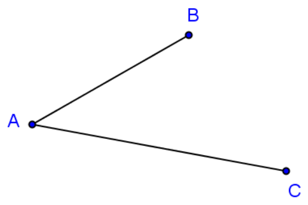


圖 5.4-6

習題 5.4-8

如圖 5.4-7，已知線段長 a，利用尺規作圖，任意作一等腰三角形，使得其腰長為 a，並作出底邊上的高。

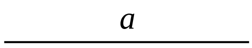


圖 5.4-7

習題 5.4-9

如圖 5.4-8，已知∠1、∠2 與長度為 a 的線段，求作一個三角形，使得這個三角形的兩個內角分別為∠1 和∠2，且∠1 的對邊長度為 a。

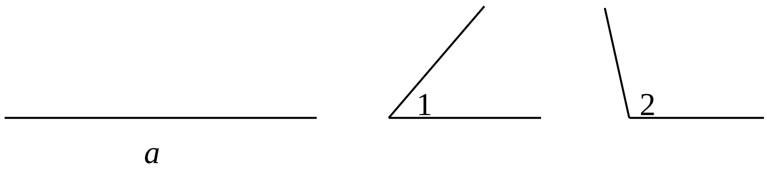


圖 5.4-8

習題 5.4-10

在△ABC 中，求作過$\overline{AB}$的中點 M 且平行$\overline{BC}$交$\overline{AC}$於點 N 的線段$\overline{MN}$。

習題 5.4-11

已知三角形的一底角、底邊長及底邊上的高，求作三角形。

5.5 節 對稱圖形作圖

對稱圖形有線對稱圖形與點對稱圖形兩種，本節介紹這兩種對稱圖形的作圖。

5.5-1 線對稱圖形之對稱點作圖

線對稱圖形之對稱點作圖要領：

1. 過圖形之一點 P 作垂直對稱軸 L 的垂直線，垂直線與對稱軸交於 R 點。
2. 以 R 為圓心，$\overline{PR}$為半徑作圓，圓與$\overleftrightarrow{PR}$交於 Q 點，如圖 5.5-1。
3. 點 Q 為點 P 對稱 L 線的對稱點。

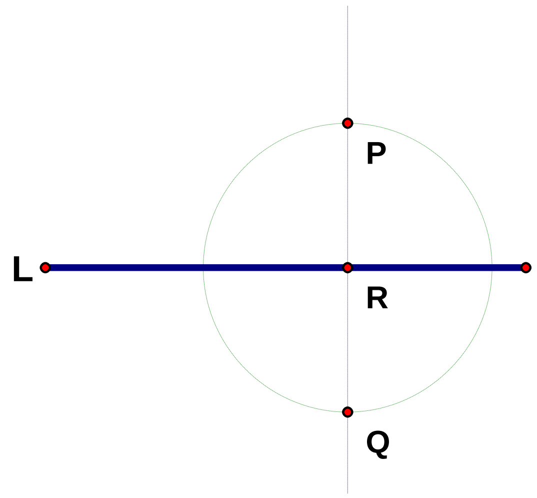


圖 5.5-1

例題 5.5-1　線對稱圖形之作圖

試作圖 5.5-2 中 ABCDE 圖形對稱直線 L 的對稱圖形。

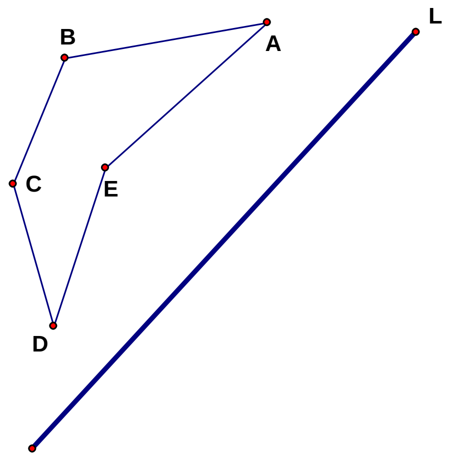


圖 5.5-2

作圖：

(1) 過 A、B、C、D、E 分別作與 L 垂直的垂直線，分別與 L 相交於 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1 各點，如圖 5.5-2(a)。

(2) 以 A_1 為圓心，$\overline{AA_1}$ 線段為半徑作圓，圓與 $\overleftrightarrow{AA_1}$ 交點 A`，同圓的半徑都相等，$\overline{AA_1}=\overline{A_1A'}$，如圖 5.5-2(b)，則 A`為 A_1 對稱直線 L 的對稱點。

(3) 同(2)作法，分別以 B_1、C_1、D_1、E_1 為圓心，分別以 $\overline{BB_1}$、$\overline{CC_1}$、$\overline{DD_1}$、$\overline{EE_1}$ 為半徑作圓，可得對稱點 B`、C`、D`、E`，如圖 5.5-2(b)所示。

(4) 連結 $\overline{A'B'}$，$\overline{B'C'}$，$\overline{C'D'}$，$\overline{D'E'}$，$\overline{E'A'}$，圖形 A`B`C`D`E`即為圖形 ABCDE 對稱直線 L 的線對稱圖形，如圖 5.5-2(c)。

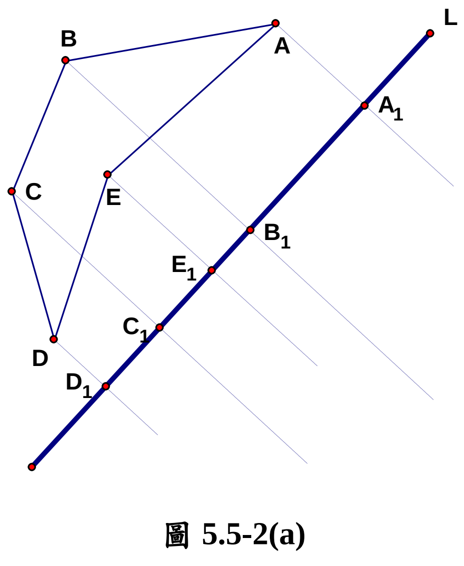


圖 5.5-2(a)

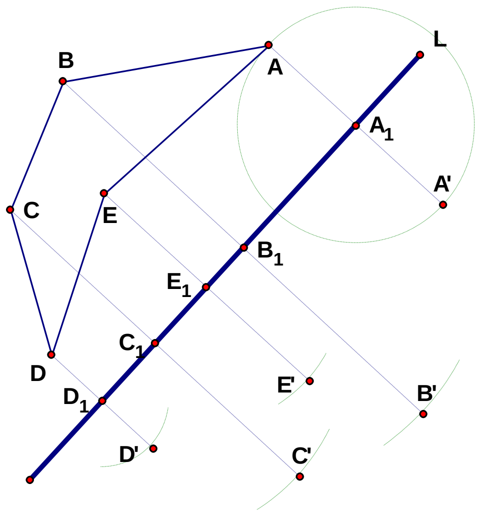


圖 5.5-2(b)

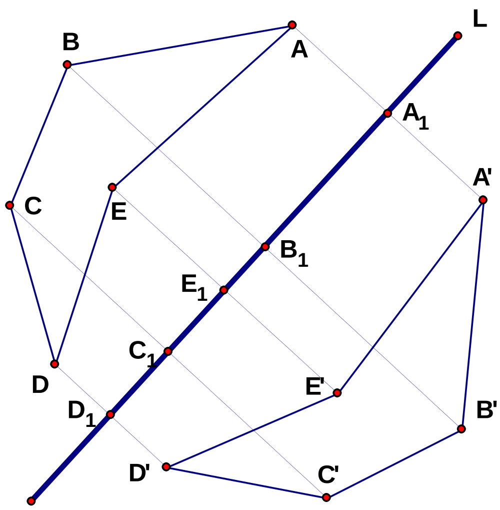


圖 5.5-2(c)

例題 5.5-2：

圖 5.5-3 是線對稱圖形的一部分，直線 L 是對稱軸，完成此線對稱圖形。

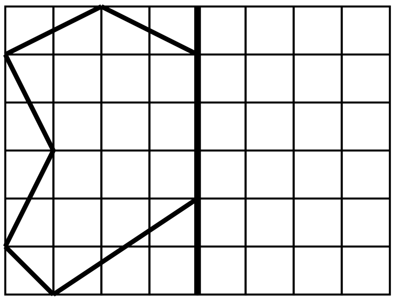


圖 5.5-3

作法：如圖 5.5-3(a)

(1) 標示圖形上幾個端點 A、B、C、D、E、F、G。

(2) 因為對稱軸 L 為鉛直線，每一水平線都與對稱軸 L 垂直，所以過 A 點的水平線，在對稱軸 L 右方 2 格的位置，標出點 A 對稱於對稱軸 L 的對稱點 A`。

(3) 過 B 點的水平線，在對稱軸 L 右方 4 格的位置，標出點 B 對稱於對稱軸 L 的對稱點 B`。

(4) 同(2)、(3)作法，標出 C、D、E 各點對稱於對稱軸 L 之對稱點 C`、D`、E`。

(5) 連$\overline{GA'}$、$\overline{A'B'}$、$\overline{B'C'}$、$\overline{C'D'}$、$\overline{D'E'}$、$\overline{E'F}$所形成之圖形即為 ABCDEFG 對稱於對稱軸 L 的對稱圖形。

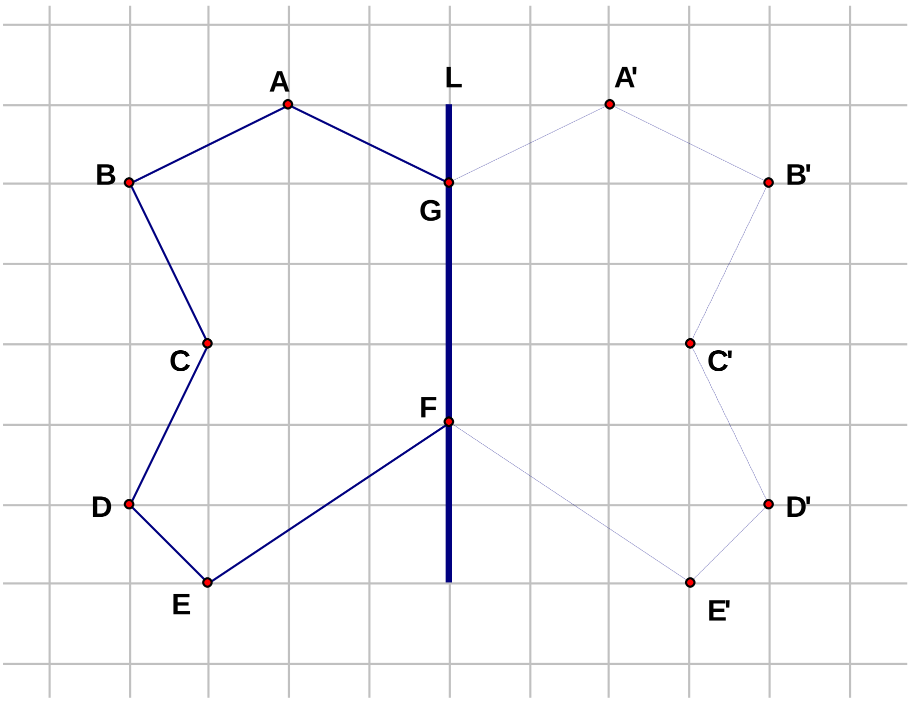


圖 5.5-3(a)

例題 5.5-3：

如圖 5.5-4，扇形 ABC 是線對稱圖形的一部分，$\overleftrightarrow{AB}$是對稱軸，試利用尺規作圖完成此線對稱圖形。

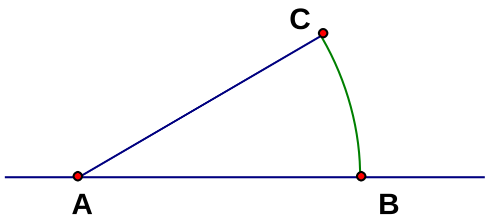


圖 5.5-4

作法：

(1) 過 C 點作垂直對稱軸$\overleftrightarrow{AB}$的直線交$\overleftrightarrow{AB}$於 D 點。

(2) 以 D 點為圓心，$\overline{CD}$為半徑作圓，交$\overleftrightarrow{CD}$於 C\`點，C\`點為 C 點的對稱點。

(3) 連接$\overline{AC'}$，以 A 點為圓心，$\overline{AC'}$為半徑作$\overset{\frown}{BC'}$，扇形 ABC\`即為扇形 ABC 對稱於對稱軸$\overleftrightarrow{AB}$的對稱圖形，如圖 5.5-4(a)。

(4) 扇形 ACC\`即為題目所求之線對稱圖形，如圖 5.5-4(a)。

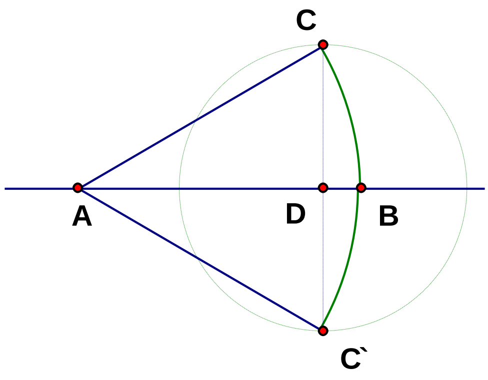


圖 5.5-4(a)

例題 5.5-4：

圖 5.5-5 是一長方形，試利用尺規作圖，畫出它的所有對稱軸。

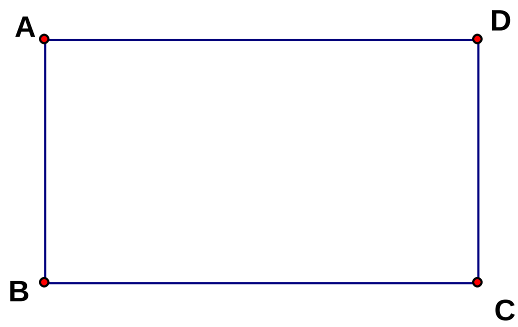


圖 5.5-5

作法：

(1) 作$\overline{AB}$的垂直平分線 L_1，如圖 5.5-5(a)。

(2) 檢查 L_1 是否為對稱軸，A 點的對稱點為 B 點，C 點的對稱點為 D，$\overline{AD}$的對稱線段為$\overline{BC}$，長方形上的每一點在對稱軸 L_1 的另一方都有對應點存在，故得 L_1 是長方形 ABCD 的對稱軸。

(3) 作$\overline{AD}$兩點的垂直平分線 L_2，如圖 5.5-5(b)。

(4) 檢查 L_2 是否為對稱軸，A 點的對稱點為 D 點，B 點的對稱點為 C，$\overline{AB}$的對稱線段為$\overline{DC}$，長方形上的每一點在對稱軸 L_2 的另一方都有對應點存在，故得 L_2 是長方形 ABCD 的對稱軸。

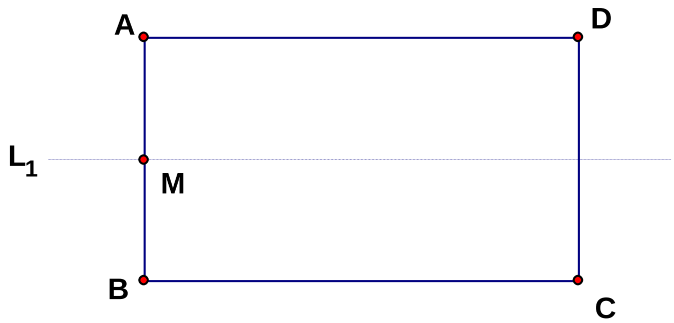


圖 5.5-5(a)

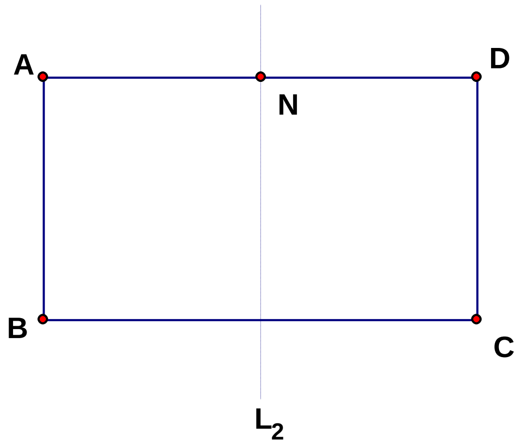


圖 5.5-5(b)

5.5-2 點對稱圖形之對稱點作圖

點對稱圖形之對稱點作圖要領：

1. 過圖形之一點 P 與對稱中心 O 作一直線。
2. 以對稱中心 O 為圓心，$\overline{OP}$為半徑作圓，圓與$\overleftrightarrow{OP}$交於 Q 點，如圖 5.5-6。
3. 點 Q 即為點 P 對稱於對稱中心 O 的對稱點。

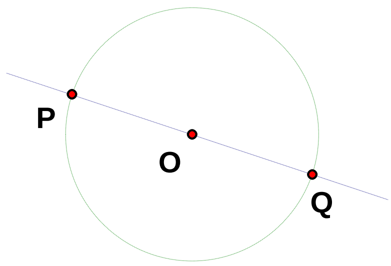


圖 5.5-6

例題 5.5-5　　點對稱圖形之作圖

試作圖 5.5-7 中 ABCDEF 圖形對稱於對稱中心 O 點之對稱圖形。

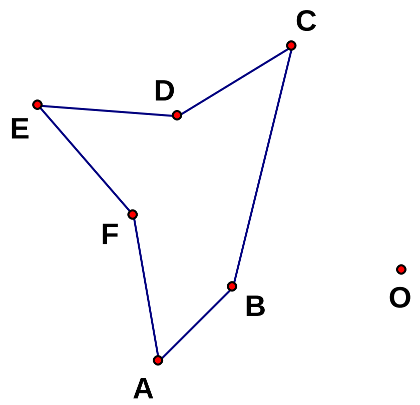


圖 5.5-7

作法：

(1) 過 A 點及對稱中心 O 點作直線，以 O 點為圓心，$\overline{AO}$為半徑作圓，交$\overleftrightarrow{AO}$於 A_1 點。A_1 為 A 點對稱於對稱中心 O 點之對稱點。

(2) 同(1)的作法，分別作出 B、C、D、E、F 各點對稱於對稱中心 O 點之對稱點，分別為 B_1、C_1、D_1、E_1、F_1。

(3) 連結$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1D_1}$、$\overline{D_1E_1}$、$\overline{E_1F_1}$、$\overline{F_1A_1}$，圖形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 即為圖形 ABCDEF 對稱於對稱中心 O 點之點對稱圖形，如圖 5.5-7(a)所示。

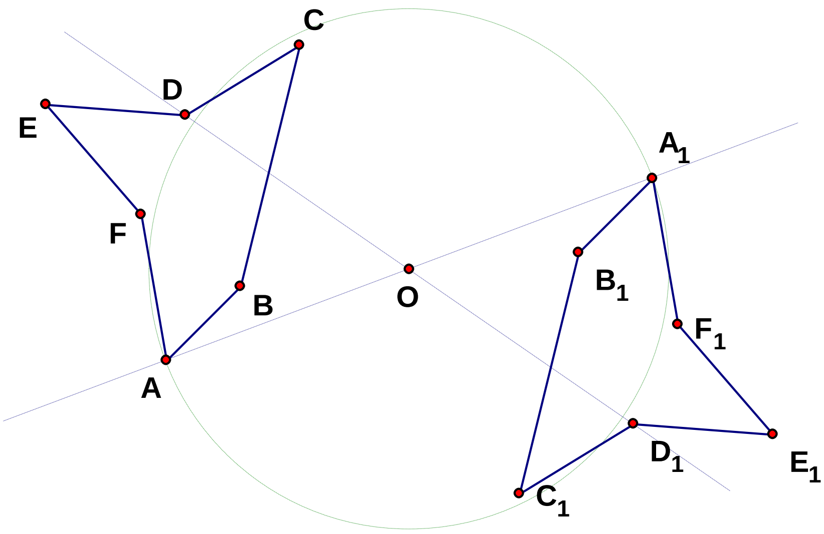


圖 5.5-7(a)

習題 5.5

習題 5.5-1：

如圖 5.5-8，利用尺規作圖，以 L 為對稱軸，畫出$\overline{AB}$的對稱線段。

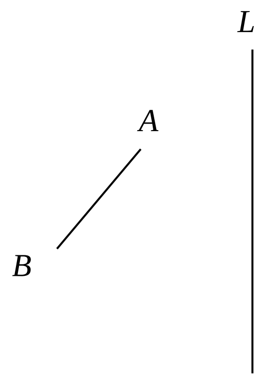


圖 5.5-8

習題 5.5-2：

利用尺規作圖，完成下列各線對稱圖形。（L 為對稱軸）

(1)

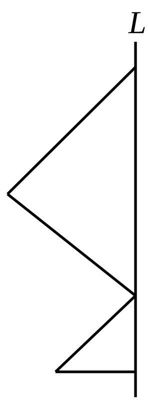


圖 5.5-9(a)

(2)

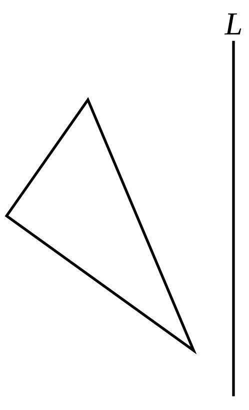


圖 5.5-9(b)

習題 5.5-3：

利用尺規作圖，畫出下列各線對稱圖形的對稱軸。

(1)

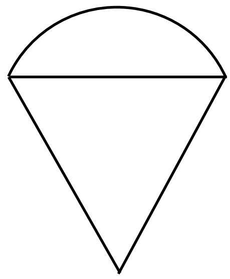


圖 5.5-10(a)

(2)

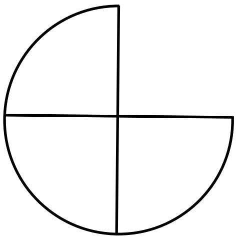


圖 5.5-10(b)

習題 5.5-4：

下列各圖形都是線對稱圖形的一半，直線 L 是對稱軸，完成這些圖形。

(1)

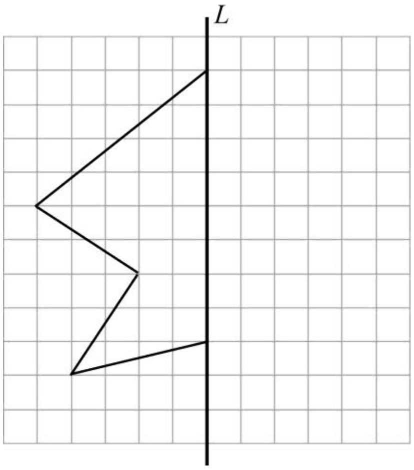


圖 5.5-11(a)

(2)

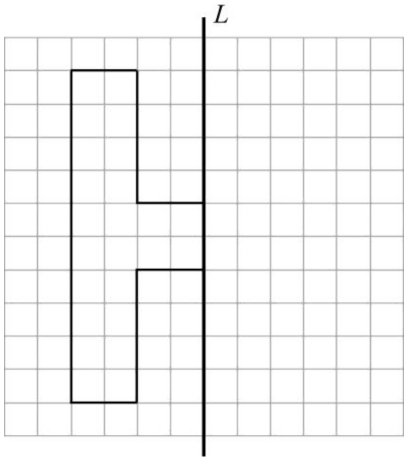
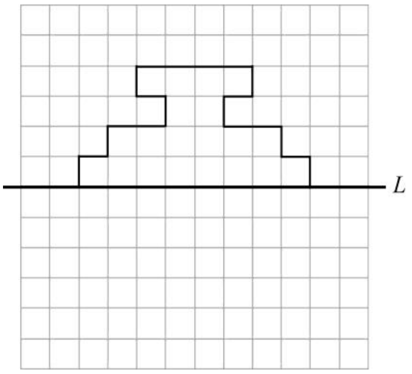


圖 5.5-11(b)

(3)



(4)

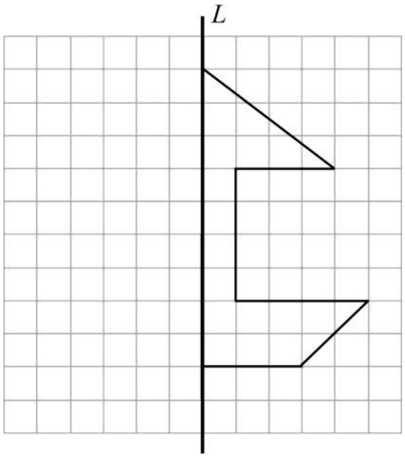


圖 5.5-11(c) **圖 5.5-11(d)**

習題 5.5-5：

下列各圖形都是線對稱圖形的一部分，直線 L、M 為兩條對稱軸，完成這些圖形。

(1)

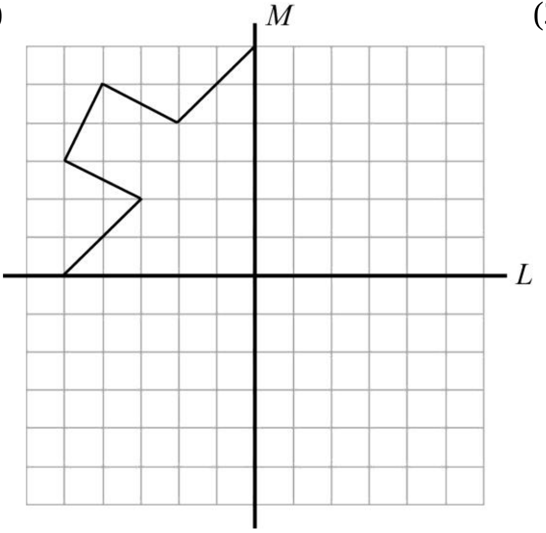


圖 5.5-12(a)

(2)

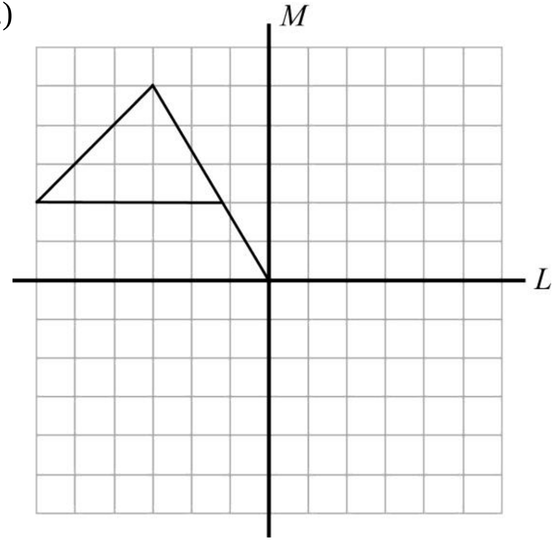


圖 5.5-12(b)

本章重點

傳統上的幾何圖形作圖只能用直尺及圓規兩種工具，本章介紹一些如何利用尺規作幾何圖的方法。

1. 平分線段的作圖法。
2. 平分角(角平分線)的作法。
3. 垂直線的作法：
   (a) 過線上一點的垂直線的作法。
   (b) 過線外一點的垂直線的作法。
4. 垂直平分線(中垂線)的作法。
5. 平行線的作法。
6. 等線段、等角度之作圖。
7. 應用以上的基本方法作三角形等圖形。
8. 對稱圖形的作法。

歷年基測題目

1. 下圖 5.3 是小方畫的正方形風箏圖案，且他以圖中的對角線為對稱軸，在對角線的下方畫一個三角形，使得新的風箏圖案成為一對稱圖形。若下列有一圖形為此對稱圖形，則此圖為何？**(96-1)**

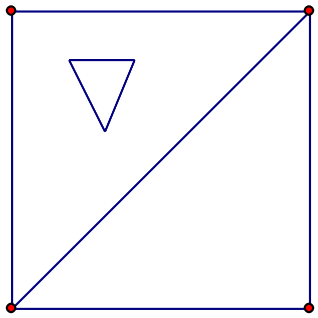
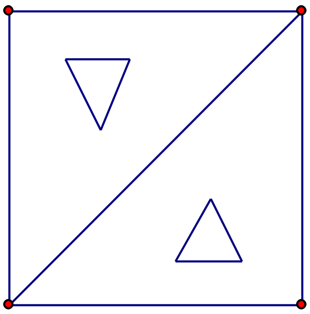
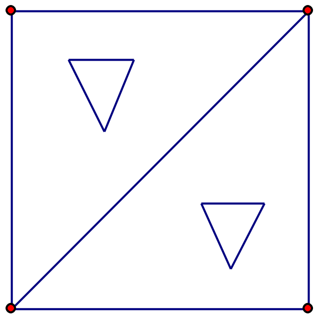


圖 5.3

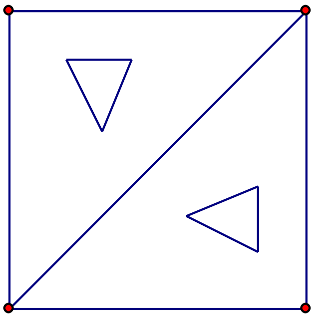
(A)



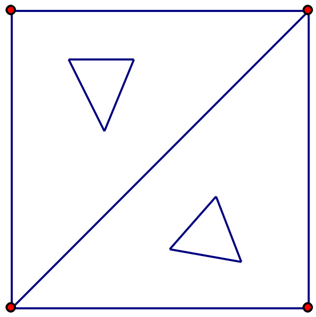
(B)



(C)



(D)



解答：(C)

想法： 對稱軸定義

解答說明：

敘述	理由
(1) (C)	對稱軸定義

※請閱讀下列的敘述後，回答第 2 題

圖 5.4 為一長方形，其內部分成 4 個大小相同的小正方形，且對角線 L_1 通過 2 個小正方形(如灰色部分)。

圖 5.5 為一長方形，其內部分成 12 個大小相同的小正方形，且對角線 L_2 通過 6 個小正方形(如灰色部分)。

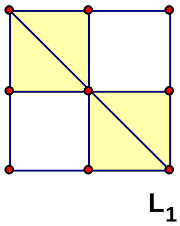


圖 5.4

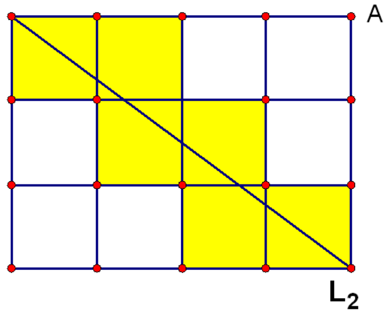


圖 5.5

2. L_1、L_2 是否分別為圖 5.4、圖 5.5 的對稱軸？ (95-1)

(A) L_1、L_2 均是 (B) L_1 是，L_2 不是 (C) L_1 不是，L_2 是 (D) L_1、L_2 均不是

解答：(B) L_1 是，L_2 不是

想法： 對稱軸定義

解答說明：

敘述	理由
(1) L_1 是圖 5.4 的對稱軸	圖 5.4 中的每一點在 L_1 的兩側都存在有一對稱點。
(2) L_2 不是圖 5.5 的對稱軸	圖 5.5 中，A 點在 L_2 的的另一側與就不存在一點與 A 點等距離的對稱點。

3. 如圖 5.6，四邊形 ABCD 為正方形。若分別以$\overline{BD}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$為直徑畫三個半圓，如圖 5.7 所示。判斷圖 5.7 中哪一線段是該圖形的對稱軸？**(94-1)**

(A) $\overline{BC}$　　**(B)** $\overline{BD}$　　**(C)** $\overline{AB}$　　**(D)** $\overline{AC}$

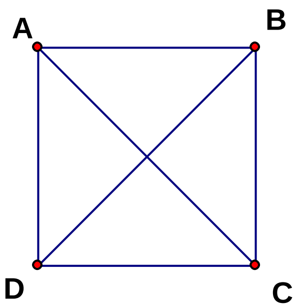


圖 5.6

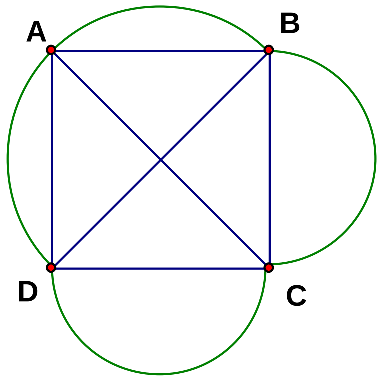
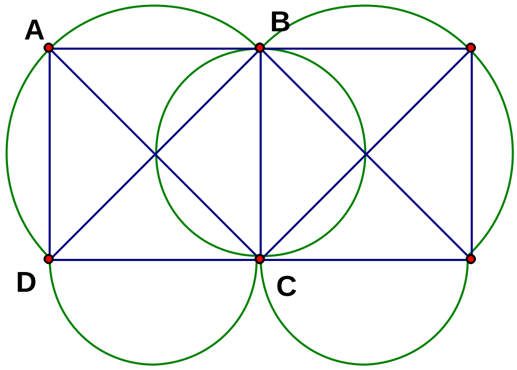


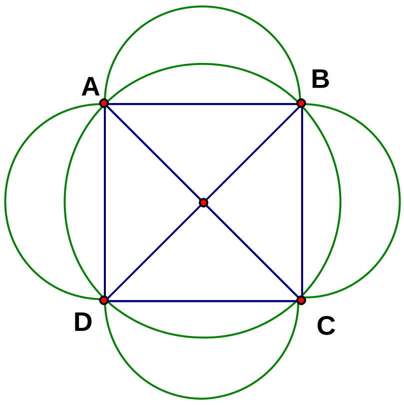
圖 5.7

解答：(D) $\overline{AC}$

想法： 依題意做對稱圖，驗證對稱圖

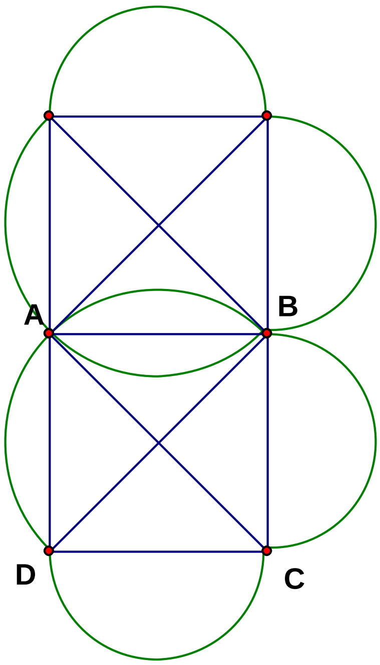
解答說明：

<table>
<tr><th>敘述</th><th></th></tr>
<tr><td>(A)


BC為對稱軸</td><td>(B)


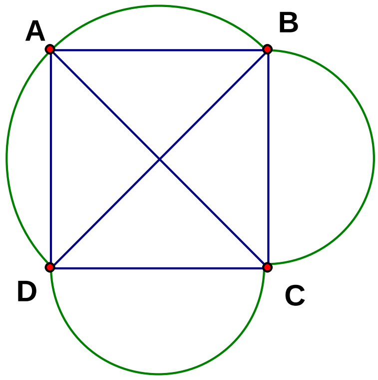
BD為對稱軸</td></tr>
</table>

(C)



AB為對稱軸

(D)



AC為對稱軸

4. 如圖 5.8 所示，已知△ABC 中，$\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$。
求作：一圓的圓心 O，使得 O 在$\overline{BC}$上，且圓 O 與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$皆相切。
下列四種作法中，哪一種是正確的？**(92-1)**

(A) 作$\overline{BC}$中點
(B) 作 ∠A 的平分線交$\overline{BC}$於 O 點
(C) 作$\overline{AC}$的中垂線，交$\overline{BC}$於 O 點
(D) 自 A 點作一直線垂直$\overline{BC}$，交$\overline{BC}$於 O 點

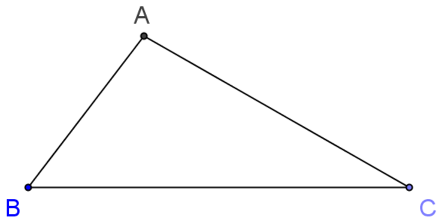
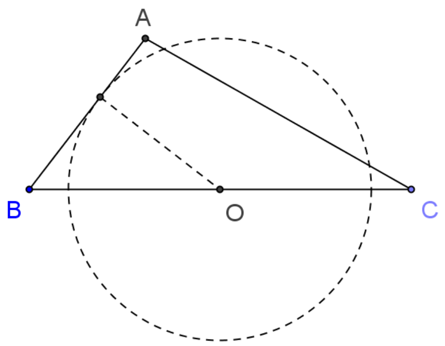
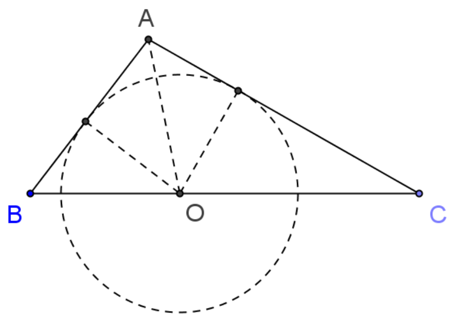
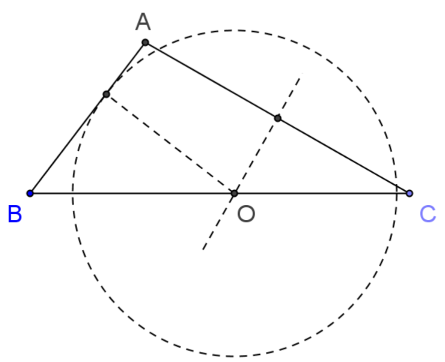
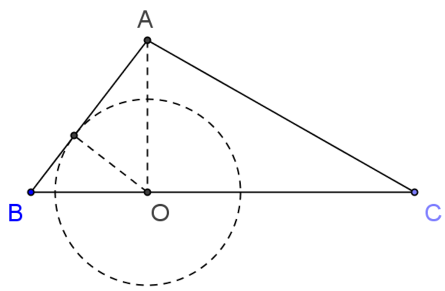


圖 5.8

解答： (B) 正確：角平分線上的任一點與角的兩邊等距離
想法： 依題意作圖，觀查是否正確，若正確，再證明正確。
解答說明：

<table>
<tr><th>敘述</th><th></th></tr>
<tr><td>(A)
</td><td>(B)

角平分線上的任一點與角的兩邊等距離</td></tr>
<tr><td>(C)
</td><td>(D)
</td></tr>
</table>