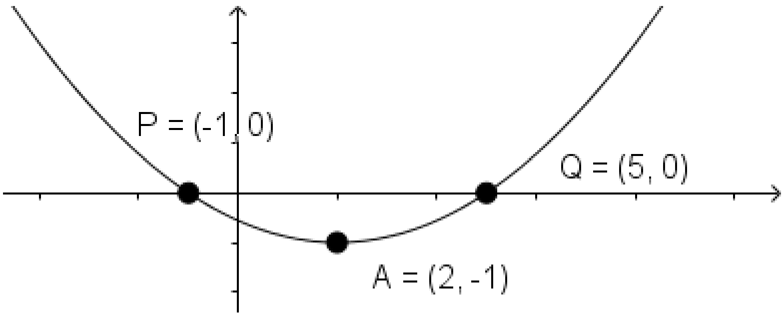
105 年國中數學教育會考 數學科難題詳解

21 坐標平面上，某二次函數圖形的頂點為$(2, -1)$，此函數圖形與 x 軸相交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=6$。

若此函數圖形通過$(1, a)$、$(3, b)$、$(-1, c)$、$(-3, d)$四點，則 a、b、c、d 之值何者為正？

(A) a　　(B) b　　(C) c　　(D) d

詳解：



此二次函數對稱軸為 $x=2$，$\overline{PQ}=6$，可知對稱軸到 P、Q 兩點之距離為 $6/2=3$

P 點座標為$(2-3,0)$，也就是 $P(-1,0)$

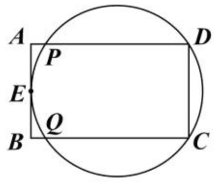
Q 點座標為$(2+3,0)$，也就是 $Q(5,0)$

由圖形可知，當$-1<x<5$，圖形 y 座標都為負(在 x 軸下方)

故$(1,a)$、$(3,b)$中的 a、b 都為負。$(-1,c)$中的 c 為 0

只有$(-3,d)$中的 d 為正，故選(D)

22 圖(十二)的矩形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{AB}$ 的中點，有一圓過 C、D、E 三點，且此圓分別與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 相交於 P、Q 兩點。甲、乙兩人想找到此圓的圓心 O，其作法如下：



圖(十二)

(甲)作 $\angle DEC$ 的角平分線 L，作 $\overline{DE}$ 的中垂線，交 L 於 O 點，則 O 即為所求

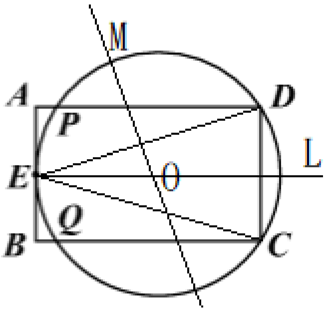
(乙)連接 $\overline{PC}$ 、 $\overline{QD}$ ，兩線段交於一點 O，則 O 即為所求

對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？

(A) 兩人皆正確　(B) 兩人皆錯誤　(C) 甲正確，乙錯誤　(D) 甲錯誤，乙正確

詳解：

甲作法



(1). 在△DEA 與△CEB 中

$\angle A = \angle B = 90°$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

$\overline{AE} = \overline{BE}$

所以△DEA 與△CEB 全等(S.A.S.全等)

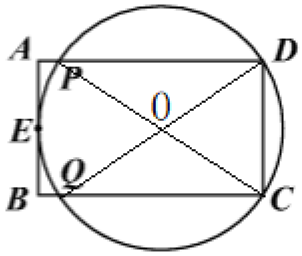
(2). $\overline{DE} = \overline{CE}$(對應邊相等)，△DEC 為等腰三角形

且 L 為∠DEC 的角平分線，故 L 為 $\overline{CD}$ 的中垂線

又 M 為 $\overline{DE}$ 的中垂線。所以 O 為△CDE 的外心，圓 O 為△CDE 的外接圓。

甲作法正確

乙作法

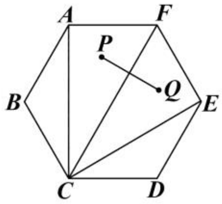


(1). $\angle QCD = 90^\circ \rightarrow \widehat{QEPD} = 180^\circ \rightarrow \overline{QD}$為此圓直徑

(2). $\angle PDC = 90^\circ \rightarrow \widehat{PEQC} = 180^\circ \rightarrow \overline{PC}$為此圓直徑

(3). 兩相異直徑交點 O 為此圓的圓心，乙作法正確
兩人皆正確，故選(A)

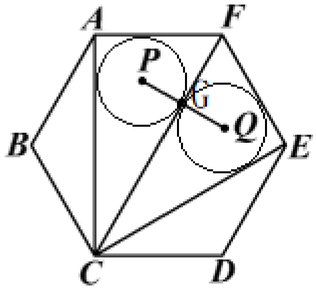
23 如圖(十三)，正六邊形 $ABCDEF$ 中，P、Q 兩點分別為△ACF、△CEF 的內心。若 $\overline{AF}=2$，則 $\overline{PQ}$ 的長度為何？



圖(十三)

(A) 1　　(B) 2　　(C) $2\sqrt{3}-2$　　(D) $4-2\sqrt{3}$

詳解：



(1). 正六邊形 $ABCDEF$ 為線對稱圖形，

所以 $\overline{CF}$ 為圖形的對稱軸，且△ACF≅△ECF

又 P、Q 分別為△ACF 和△ECF 的內心，所以 P、Q 兩點互為對稱點

因此 $\overline{PQ}\perp\overline{CF}$ 且 $\overline{PG}=\overline{QG}$ (對稱點連線與對稱軸互相垂直且被對稱軸平分)

(2). 已知 P、Q 分別為△ACF 和△ECF 的內心，且 $\overline{PG}\perp\overline{CF}$ 且 $\overline{QG}\perp\overline{CF}$

所以 $\overline{PG}$、$\overline{QG}$ 分別為△ACF 和△ECF 的內切圓半徑

(3). 正六邊形每一內角為 120°，且△BAC 為等腰三角形

所以底角 ∠BAC＝(180°−120°)/2＝30°

因此∠CAF＝∠BAF−∠BAC＝120°−30°＝90°

又 $\overline{CF}$ 為對稱軸，∠AFC＝∠AFE/2＝120°/2＝60°

所以△ACF 中，∠ACF＝180°−∠CAF－∠AFC＝180°−90°−60°＝30°

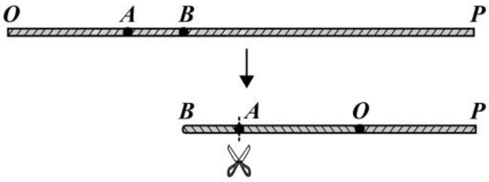
因此△ACF 為 30°-60°-90°直角三角形，邊長比為 1：$\sqrt{3}$：2

已知 $\overline{AF}=2$，可得 $\overline{CF}=4$，$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，又 $\overline{PG}$、$\overline{QG}$ 分別為△ACF 和△ECF 的內切圓半徑

所以 $\overline{PG}=\dfrac{\overline{AF}+\overline{AC}-\overline{CF}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{3}-4}{2}=\sqrt{3}-1$

$\overline{PQ}=\overline{PG}+\overline{QG}=2\overline{PG}=2\sqrt{3}-2$，故選(C)

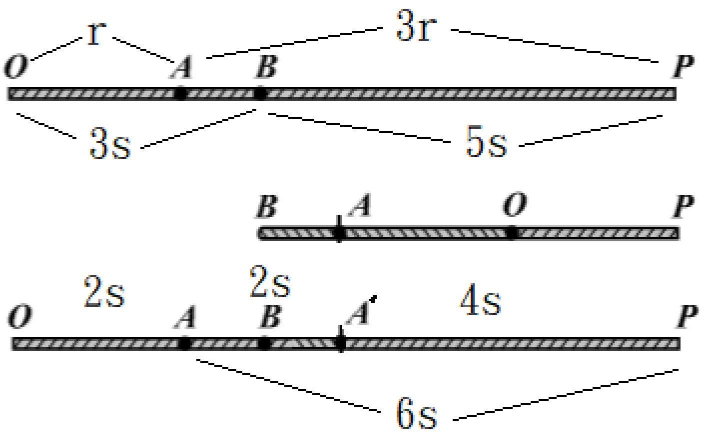
24 如圖(十四)，$\overline{OP}$ 為一條拉直的細線，A、B 兩點在 $\overline{OP}$ 上，且 $\overline{OA}:\overline{AP}=1:3$，$\overline{OB}:\overline{BP}=3:5$。若先固定 B 點，將 $\overline{OB}$ 摺向 $\overline{BP}$，使得 $\overline{OB}$ 重疊在 $\overline{BP}$ 上，如圖(十五)，再從圖(十五)的 A 點及與 A 點重疊處一起剪開，使得細線分成三段，則此三段細線由小到大的長度比為何？



圖(十四)
圖(十五)

(A) 1：1：1　　(B) 1：1：2　　(C) 1：2：2　　(D) 1：2：5

詳解：



設 $\overline{OA}=r$，$\overline{AP}=3r$，$\overline{OB}=3s$，$\overline{BP}=5s$

$r+3r=3s+5s$

$\rightarrow\ r=2s$

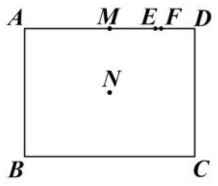
$\rightarrow\overline{OA}=2s$，$\overline{AP}=6s$

$\overline{AB}=6s-5s=s$，$\overline{A'B}=\overline{AB}=s$，$\overline{AA'}=2s$

$\overline{A'P}=6s-2s=4s$

剪開後三條細線由小到大的長度比為 2s：2s：4s＝1：1：2，故選(B)

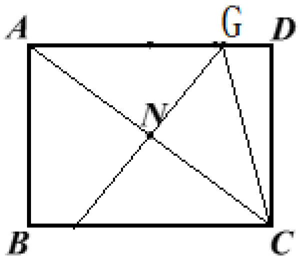
25 如圖(十六)，矩形 $ABCD$ 中，M、E、F 三點在 $\overline{AD}$ 上，N 是矩形兩對角線的交點。若 $\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=32$，$\overline{MD}=16$，$\overline{ED}=8$，$\overline{FD}=7$，則下列哪一條直線是 A、C 兩點的對稱軸？



圖(十六)

(A) 直線 MN　(B) 直線 EN
(C) 直線 FN　(D) 直線 DN

詳解：



設直線 $\overleftrightarrow{NG}$ 為 A、C 兩點的對稱軸。

設 $\overline{GD}=x$，$\overline{GA}=32-x$

$\overline{AC}\perp\overleftrightarrow{NG}$ 且 $\overline{AN}=\overline{CN}$，$\overleftrightarrow{NG}$ 為 $\overline{AC}$ 的中垂線

$\overline{GC}=\overline{GA}=32-x$

在直角三角形 CDG 中

$\overline{GC}^2=\overline{GD}^2+\overline{CD}^2$

$(32-x)^2=x^2+24^2$

解得 $x=7$，即 $\overline{GD}=7$，依題意 G 點為 F 點

故選(C)